علم تثلیث

ترجمہ ایس ایل لونی کی کتاب کا

مترجم حذیفہ

علم تثلیث

ترجمہ ایس ایل لونی[1] کی کتاب[2] کا

مترجم حذیفہ

[1] یعنی S. L. Loney
[2] جو 1893 میں کیمبرج سے چپی تھی۔

جز اول: تثلیث مسطحہ[3]

[3] یعنی Plane Trigonometry ۔

باب 1

پیمائش زوایا، پیمانۂ ساٹھواں و سواں و دَوری۔

1. ہندسہ میں زوایا کو قائمہ سے ناپا جاتا ہے۔ لیکن وہ ناپنے کے لیے ایک غیر مناسب اکائی ہے بوجہ اس کی بڑائی کے۔

2. پیمائش کے نظام **ساٹھ عددی** میں ایک قائمہ کو 90 اجزاءِ متساوی میں تقسیم کیا جاتا ہے جنہیں ہم **درجات** کہیں گے۔ و ہر درجہ 60 اجزاء متساوی میں تقسیم کیا جاتا ہے جنہیں ہم **دقیقات** کہیں گے۔ و ہر دقیقہ 60 اجزاء متساوی میں تقسیم کیا جاتا ہے جنہیں **لمحات** کہیں گے۔
و نقوش °1، '1، "1 سے مراد ہے ایک درجہ، ایک دقیقہ، ایک لمحہ حسب ترتیب۔
لہذا 60 لمحات ("60) ہوئے 1 دقیقہ ('1)،
و 60 دقیقات ('60) ہوئے 1 درجہ (°1)،
و 90 درجات (°90) ہوئے 1 قائمہ۔
و یہ نظام خوب مُہذَّب ہے و علم تثلیث کے مجری عملی میں ہمیشہ استعمال ہوتا ہے۔
لیکن یہ بھی بہت مناسب نہیں ہے بوجہ 60 و 90 کے ضربیات کے۔

3. اس لیے ایک اور نظام پیمائش، جسے **نظام سو عددی** یا نظام فرانسی کہتے ہیں، وضع کیا گیا۔ اس نظام میں قائمہ کو 100 اجزاء متساوی میں تقسیم کیا جاتا ہے جسے ہم **مرتبات** کہیں گے۔ پھر ہر مرتبہ 100 دقیقات میں تقسیم ہوتا ہے، و ہر دقیقہ 100 لمحات میں۔

و نقوش $1^{\text{م}}$، '1، "1 سے ایک مرتبہ، ایک دقیقہ، ایک لمحہ مراد ہے حسب ترتیب۔

لہذا	100 لمحات ("100) ہوئے 1 دقیقہ ('1)،
و	100 دقیقات ('100) ہوئے 1 مرتبہ ($1^{\text{م}}$)،
و	100 مرتبات ($100^{\text{م}}$) ہوئے 1 قائمہ۔

4. یہ نظام نظام ساٹھ عددی سے کافی زیادہ مناسب ہے۔ لیکن اس کو استعمال کے لیے اختیار کرنے میں اصولی طور پہ بہت ساری جدول کا دوبارہ حساب لگانا ہوگا۔ یہی وجہ ہے کہ یہ نظام کبھی عمل میں نہیں آ سکا۔

5. پیمانۂ ساٹھ عددی کو سو عددی میں تبدیل کرنا و اس کا عکس۔

جونکہ قائمہ 90° کے متساوی ہے، و $100^{\text{م}}$ کے بھی۔

تو ہمیں حاصل ہوا $90^{\circ} = 100^{\text{م}}$

$$\therefore 1^{\circ} = \frac{10^{\text{م}}}{9} \quad \text{و} \quad 1^{\text{م}} = \frac{9^{\circ}}{10}$$

$$\urcorner \therefore \frac{1^{\circ}}{10} = \frac{1^{\text{م}}}{9} \ulcorner$$ [4]

[4] اس علامت، یعنی ⌐ ¬، کو کونا کہا جاتا ہے۔ و اس کتاب میں جو کچھ بھی کونوں میں گھرا ہے وہ مترجم کے جانب سے زیادتی ہے۔

لہذا درجات کو مرتبات میں تبدیل کرنے کے لیے ان میں ان کا ایک نواں جمع کرو، و مرتبات کو درجات میں تبدیل کرنے کے لیے ان میں سے ان کا ایک دسواں تفریق کرو۔

مثال: $40^{م} = (36 \times \frac{1}{9} + 36)^{م} = 36^\circ$

و $57.6^\circ = (6.4 - 64)^\circ = (64 \times \frac{1}{10} - 64)^\circ = 64^{م}$

و اگر زاویہ کے درجات صحیحی[5] نہ ہوں تو ہم انہیں ایک درجہ کے کسر میں تعبیر کریں گے پھر مرتبات میں تبدیل کریں گے۔

عمل میں عموماً زاویہ کو قائمہ کے کسر میں تعبیر کرنا زیادہ مناسب ہوتا ہے۔ و اس کا طریقہ درج ذیل امثلہ میں نمایا ہے۔

مثال 1: $63^\circ\ 14'\ 51''$ کو پیمانۂ سو عددی میں تعبیر کرو۔

معلوم ہے $0.85' = \frac{17'}{20} = \frac{51'}{60} = 51''$

و $0.2475^\circ = \frac{14.85^\circ}{60} = 14.85' = 51''\ 14'$

$\therefore$ قائمہ $\frac{63.2475}{90} = 63.2475^\circ = 51''\ 14'\ 63^\circ$

$=$ 0.70275 قائمہ

$50''\ 27'\ 70^{م} = 27.5'\ 70^{م} = 70.275^{م} =$

[5] **صحیحی** سے مراد وہ چیز ہے جو عدد صحیح سے تعبیر ہو، نہ کہ اعداد اعشاریہ و کسر وغیرہ سے۔

مثال 2: $94^g\ 23'\ 87''$ کو پیمانۂ ساٹھ عددی میں تبدیل کرو۔

$94^g\ 23'\ 87'' = 0.942387$ قائمہ[6]

$\times\ 90$

84.81483 درجات

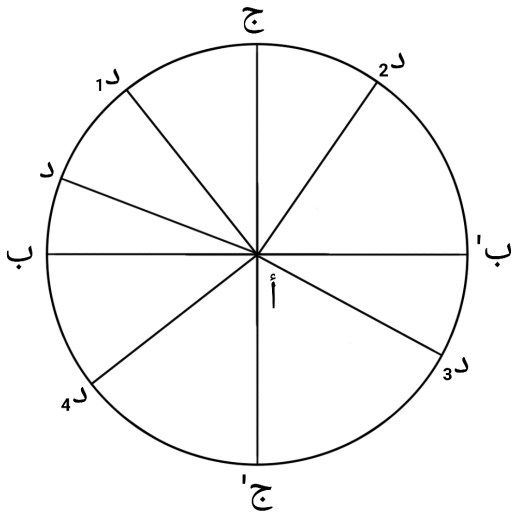
$\times\ 60$

48.8898 دقیقات

$\times\ 60$

53.3880 لمحات

$\therefore\ 94^g\ 23'\ 87'' = 84°\ 48'\ 53.388''$

6. **کسی بھی سائز کے زوایا:** فرض کرو کہ دو خطوط مستقیم بأب' و جأج' نقطۂ أ پہ زاویۂ قائمہ سے آپس میں ملی ہیں، و فرض کرو کہ ایک گھومنے والی خط أد أب سے چلی و گھڑی کی سوئی کے جانب میں گھومی (نقطہ أ کے گرد)۔

تو أب و أج کے درمیان خط دورانی کے کسی بھی مقام پہ، مثلا أد$_1$ پہ، وہ زاویہ بأد$_1$ گھومی، جو قائمہ سے چھوٹا ہے۔ و أج و أب' کے درمیان کسی بھی مقام پہ، مثلا أد$_2$ پہ، زاویہ بأد$_2$ گھومی جو قائمہ سے بڑا ہے۔

---

[6] لمحہ کو دقیقہ بنانے کے لیے 100 سے تقسیم کیا، و دقیقہ کو مرتبہ بنانے کے لیے 100 سے تقسیم کیا، و مرتبہ کو قائمہ بنانے کے لیے 100 سے تقسیم کیا، تو 1000000 ہو گیا۔

و أب' و أج' کے درمیان کسی بھی مقام أد$_3$ پہ زاویہ ہوا بأد$_3$ یعنی بأج+جأب'+ب'أد$_3$ یعنی 2 قائمات + ب'أد$_3$، تو جو زاویہ بنا وہ دو قائمات سے بڑا ہے۔
و أج' و أب کے درمیان کسی مقام أد$_4$ پہ جو زاویہ گھومی وہ اسی طرح تین قائمات سے بڑا ہوگا۔

اگر خط أد ابھی بھی گھومتی ہے و دوسری مرتبہ مقام أد$_1$ پہ جاتی ہے، تو جو زاویہ وہ گھومے گی وہ بأد$_1$ نہ ہوگا، بلکہ 4 قائمات + بأد$_1$ ہوگا۔

ایسے ہی جب خط دورانی دو مکمل دوران لگا کے پھر سے مقام أد$_2$ پہ آئے گی، تو جو زاویہ اس نے تمام کیا وہ 8 قائمات + بأد$_2$ ہوگا۔

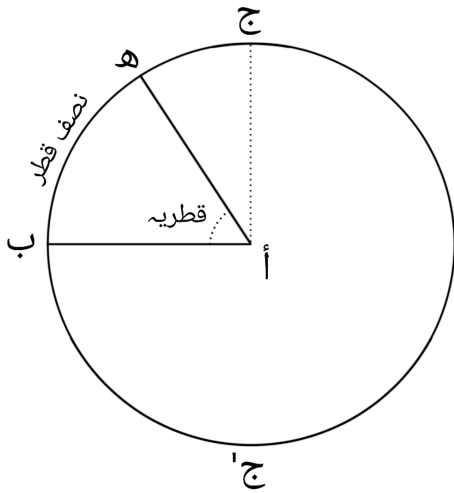
7. اگر خط دورانی أد خطوط أب و أج کے درمیان ہو تو ہم کہیں گے کہ وہ پہلے ربع میں ہے، و اگر أج و أب' کے درمیان ہو تو دوسرے ربع میں ہے، و اگر أب' و أج' کے درمیان ہو تو تیسرے ربع میں ہے، و اگر أج' و أب کے درمیان ہو تو چوتھے ربع میں ہے۔

8. **مثال:** خط دورانی کا مقام کیا ہوگا جب وہ گھومی (1) 225°، (2) 480°، (3) 1050°؟

(1) 225° = 180°+45° تو خط دورانی 2 قائمات سے 45° زیادہ گھومی، لہذا وہ أب' و أج' کے درمیان بالکل وسط میں ہے۔

(2) چونکہ 480° = 360°+120°، تو خط دورانی ایک مکمل دوران سے 120° زیادہ گھومی، لہذا وہ أج و أب' کے درمیان ہے و أج سے 30° کا زاویہ بنایا ہے۔

(3) چونکہ 1050° = (11×90°)+60°، تو خط دورانی 11 قائمات سے 60° زیادہ گھومی، لہذا وہ أج' و أب کے درمیان ہے و أج' سے 60° کا زاویہ بنایا ہے۔

9. **پیمائش دوری:** پیمائش زوایا کا ایک تیسرا نظام بھی وضع کیا گیا ہے، و یہی نظام ہے جو ریاضی کی تمام اعلی انواع میں مستعمل ہے۔

اس میں جو اکائی مستعمل ہے وہ ایسے حاصل ہوئی ہے کہ کوئی بھی دائرہ بھجج' لے لو جس کا مرکز أ ہو، و کسی بھی مقام ب سے ایک قطعہ بھ اخذ کرو جس کا طول نصف قطر کے متساوی ہو، پھر خطوط أب و أھ بناو۔ تو زاویہ بأھ وہ زاویہ ہوا جس کو پیمائش دوری میں اکائی بنایا گیا ہے، یعنی یہ وہ زاویہ ہے جس سے اس نظام میں ہم دیگر تمام زوایا کی پیمائش کرتے ہیں۔ و اس زاویہ کو ہم **ایک قطریہ** کہیں گے، و $1^{ق}$ سے تعبیر کریں گے۔

10. کسی اکائی کے مناسب ہونے کے لیے ضروری ہے کہ وہ ایک مقدار مستقل ہو۔ تو ہمارے لیے یہ ثابت کرنا لازم ہے کہ قطریہ ایک زاویۂ مستقل ہے، جو ہم آگے آنے والے مضامین میں کریں گے۔

11. **مکتسب:** طولِ محیطِ دائرہ و قطرِ دائرہ کے درمیان ہمیشہ ایک تناسبِ مستقل ہوتا ہے۔

تو کوئی دو دائرات لے لو جن کا مرکز أ مشترک ہو۔ و دائرۂ اکبر پہ ایک ط اضلاع والا مضلعِ منتظم[7] بجضف... وضع کرو۔ پھر فرض کرو کہ خطوط أب، أج، أض، أف،... دائرۂ اصغر سے نقاط ٻ، ڃ، ڞ، ڣ،... پہ ملی ہیں؛ و ٻڃ، ڃڞ، ڞڣ،... کو ملا دو۔ تو اقلیدس 6-2 کے مطابق ٻڃڞڣ... ط اضلاع کا ایک مضلع منتظم ہوا جو دائرۂ اصغر پہ وضع ہے۔

چونکہ أٻ=أڃ و أب=أج، تو خطوط ٻڃ و بج لازماً متوازی ہوئیں۔

و لہذا $\frac{\text{بج}}{\text{ٻڃ}} = \frac{\text{أب}}{\text{أٻ}}$ (اقلیدس 6-4)

پھر بوجہ مضلع بجضف... کے منتظم ہونے کے، اس کا محیط یعنی اس کے اضلاع کا اجتماع متساوی ہوا ط.بج کے۔ و ایسے ہی داخلی مضلع کے لیے ہوگا۔

لہذا حاصل ہوا $\frac{\text{محیط مضلع خارجی}}{\text{محیط مضلع داخلی}} = \frac{\text{ط.بج}}{\text{ط.ٻڃ}} = \frac{\text{بج}}{\text{ٻڃ}} = \frac{\text{أب}}{\text{أٻ}}$ ......(1)

تو مضلع کے اضلاع چاہے جتنے ہوں، اس میں یہ نسبت ضرور ہوگی۔

فرض کرو کہ اگر اضلاع بلا نہایہ زیادہ ہو جائیں (یعنی فرض کرو کہ ط ناقابل تصور زیادہ ہو جائے) کہ مضلعِ خارجی کا محیط دائرۂ خارجی کے محیط کے متساوی ہو جائے، و مضلع داخلی کا محیط دائرۂ داخلی کے محیط کے متساوی ہو جائے۔

تو نسبتِ (1) ہوگی $\frac{\text{محیط دائرۂ خارجی}}{\text{محیط دائرۂ داخلی}} = \frac{\text{أب}}{\text{أٻ}} = \frac{\text{نصف قطر دائرۂ خارجی}}{\text{نصف قطر دائرۂ داخلی}}$

لہذا ہوا $\frac{\text{محیط دائرۂ خارجی}}{\text{نصف قطر دائرۂ خارجی}} = \frac{\text{محیط دائرۂ داخلی}}{\text{نصف قطر دائرۂ داخلی}}$

---

[7] مضلع منتظم یعنی وہ مضلع جس کے تمام اضلاع و زوایا متساوی ہوں۔

چونکہ دونوں دائرات کے سائزوں کے لیے کوئی قید نہیں ہے، لہذا مقدار $\frac{\text{محیط دائرہ}}{\text{نصف قطر دائرہ}}$ تمام دائرات کے لیے متساوی ہوگی۔
لہذا محیطِ دائرہ و نصفِ قطر کا تناسب ایک مقدار مستقل ہوا، و ایسے ہی اس کا و قطر کا تناسب ہے۔

12. گزشتہ مضمون میں ہم نے بتایا کہ تناسب $\frac{\text{محیط}}{\text{قطر}}$ تمام دائرات کے لیے ایک ہی ہوتا ہے۔ اس تناسب مستقل کی قیمت کو ہمیشہ ایک حرفِ یونانی π (ملفوظ پَائِی) سے تعبیر کیا جاتا ہے، تو π ایک عدد ہوا۔
لہذا $\frac{\text{محیط}}{\text{قطر}}$ = عدد مستقل π۔
تو ہمیں آگے مذکور مکتسب حاصل ہوا: **محیط دائرہ ہمیشہ اس کے قطر سے π مرتبہ و اس کے نصف قطر سے 2π مرتبہ زیادہ ہوتا ہے۔**

13. بد قسمتی سے π کی قیمت عدد تام نہیں ہے، و نا ہی اسے کسر میں تعبیر کیا جا سکتا ہے، نا ہی کسرِ اعشاری تکراری یا غیر تکراری میں۔
تو عدد π ایک نا قابل تسخیر مقدار ہے، یعنی مقدار جس کی قیمت کاملا دو اعداد تام کے تناسب کے طور پہ تعبیر نہ کی جاکے۔
خیر 8 مقام اعشاری تک درست اس کی قیمت ہے ...3.14159265۔
و کسر $\frac{22}{7}$ پہلے 2 مقام اعشاری تک π کی صحیح قیمت بتاتا ہے،
کہ $\frac{22}{7}$ = ...3.14285۔

جبکہ π کی زیادہ درست قیمت $\frac{355}{113}$ ہے جو 6 مقام اعشاری تک درست ہے،

کہ $\frac{355}{113} = 3.14159203...$۔

حاصل: π کی قریبی ایک قیمت جو 2 مقام اعشاری تک درست ہے وہ کسر $\frac{22}{7}$ سے تعبیر کی جاتی ہے، و ایک مزید درست قیمت ...3.14159 ہے

و ہم عمل تقسیم سے دکھا سکتے ہیں کہ $\frac{1}{\pi} = 0.3183098862...$۔

14. **مثال 1:** ایک تین پہیا گاڑی کی پہیا کا قطر 28 انگوٹھے ہے، تو پہیا کے ایک دوران میں اس کا مرکز کتنا منتقل ہوا؟

یہاں نصف قطر 14 انگوٹھے ہے۔

تو محیط = $14.\pi.2 = 28\pi$ انگوٹھے۔

پھر اگر $\pi = \frac{22}{7}$ لیا، تو محیط = $28 \times \frac{22}{7}$ انگوٹھے = 7 قدم 4 انگوٹھے تقریبا۔

باعتبار π کی مزید درست قیمت ...3.14159265 کے

محیط = $28 \times 3.14159265...$ انگوٹھے = 7 قدم ...3.96459 انگوٹھے۔

مثال 2: اُس راستۂ دائری کا نصف قطر کیا ہوگا جس کے گرد ایک دوڑنے والا جب پانچ دوران لگاتا ہے تو 1 میل ہوتا ہے؟

اس کا محیط ہوا $\frac{1}{5} \times 1760$، یعنی 352، گز[8]۔

[8] 1 میل = 1760 گز۔

لہذا اگر نق راستہ کا نصف قطر[9] ہے

تو 2πنق = 352.

یعنی نق = $\frac{176}{\pi}$ گز.

پھر $\pi = \frac{22}{7}$، حاصل ہوا نق = $\frac{7\times176}{22}$ گز تقریبا۔

مزید درست قیمت $\frac{1}{\pi} = 0.31831$ سے حاصل ہوا

نق = $0.31831 \times 176 = 56.02256$ گز۔

15. **مکتسب:** قطریہ ایک زاویۂ مستقل ہے۔

مضمون 9 کا رسمہ لے لو، و فرض کرو کہ قطعہ بج دائرہ کا ایک ربع ہے یعنی اس کے محیط کا ایک چوتھائی۔

تو مضمون 12 کے مطابق بج کا طول $\frac{\pi.\text{نق}}{2}$ ہوا[10]، جبکہ نق دائرہ کا نصف قطر ہے۔

و اقلیدس 6-33 کے مطابق کسی دائرہ کے مرکز میں بنے زوایا کا ایک دوسرے کے ساتھ تناسب متساوی ہے ان قطعات کے آپسی تناسب کے جن پہ وہ زوایا قائم ہیں۔

لہذا $\frac{\angle\text{بأھ}}{\angle\text{بأج}} = \frac{\text{قطعہ بھ}}{\text{قطعہ بج}} = \frac{\text{نق}}{\frac{\pi}{2}\cdot\text{نق}} = \frac{2}{\pi}$

$\angle\text{بأھ} = \frac{2}{\pi}.\angle\text{بأج}$.

لیکن زاویہ بأھ ایک قطریہ ہے۔

لہذا ایک قطریہ = $\frac{2}{\pi}.\angle\text{بأج} = \frac{2}{\pi} \times$ ایک قائمہ۔

---

[9] و اسے نَقْ بڑھیں گے۔

[10] کیونکہ محیط = 2πنق، نصف محیط = πنق، ربع محیط = πنق\2.

چونکہ قائمہ ایک زاویۂ مستقل ہے، و ہم ثابت کر چکے ہیں (مضمون 12) کہ π ایک عدد مستقل ہے، تو اس سے لازم ہے کہ قطریہ بھی ایک زاویۂ مستقل ہے، و لہذا قطریہ ہمیشہ یکساں ہوگا خواہ وہ دائرہ کیسا ہی ہو جس پہ یہ بنا ہے۔

16. مقدار قطریہ،

مضمون گزشتہ کے مطابق

$$\text{ایک قطریہ} = \frac{2}{\pi} \times \text{قائمہ} = \frac{180^\circ}{\pi} = \frac{180^\circ}{3.14159265...}$$

$$= 57.2957795^\circ = 57^\circ\ 17'\ 44.8''\ \text{تقریباً}.$$

17. چونکہ ایک قطریہ = $\frac{2}{\pi}$ × ایک قائمہ،

تو ایک قائمہ = $\frac{\pi}{2}$ قطریات،

تو 180° = 2 قائمات = π قطریات،

و 360° = 4 قائمات = 2π قطریات،

لہذا خط دورانی (مضمون 6 میں) جب ایک مکمل دوران تمام کرے گی، تو وہ ایک زاویہ بنائے گی جو 2π قطریات ہوگا۔ و جب وہ تین دوران مکمل کرے گی تو 6π قطریات کا زاویہ ہوگا۔ و جب وہ ط دوران کرے گی تو زاویہ بنائے گی 2طπ قطریات کا۔

18. عمل میں عموماً قطریہ کے رمز کو حذف کر دیا جاتا ہے تو "$\pi^{ق}$ کا ایک زاویہ" کے بجائے کہا جاتا ہے "ایک π زاویہ".

لہذا طالب کو یہ بات خوب یاد رکھنا چاہیے کہ اگر وہ اکائی مذکور نہ ہو جس سے زاویہ کی پیمائش کی گئی ہے، تو وہ اپنے ذہن میں لفظ قطریہ قائم کر لے، ورنہ دھوکا کھا سکتا ہے کہ π سے 180° مراد ہے۔ و یہ سچ ہے کہ π قطریات ($\pi^{ق}$) متساوی ہیں 180° کے، لیکن π خود ایک عدد ہے، محض عدد۔

19. پیمانۂ دوری کو پیمانۂ ساٹھ عددی یا پیمانۂ سو عددی میں تبدیل کرنا و اس کا عکس۔

طالب کو درج ذیل نسبتیں یاد کر لینا چاہیے۔

2 قائمات = $180^\circ = 200^{م} = \pi^{ق}$۔

تو تبدیلی اب محض اصولِ حساب سے ہوگی۔

مثال:

(1) $0.45\,\pi^{ق} = 0.45 \times 180^\circ = 81^\circ = 90^{م}$۔

(2) $3^{ق} = \frac{3}{\pi} \times \pi^{ق} = \frac{3}{\pi} \times 180^\circ = \frac{3}{\pi} \times 200^{م}$۔

(3) $40^\circ\ 15'\ 36'' = 40^\circ\ 15\frac{3}{5}{}' = 40.26^\circ$

$= 40.26 \times \frac{\pi^{ق}}{180} = 0.2236\,\pi$ قطریات۔

(4) $40^{م}\ 15'\ 36'' = 40.1536^{م} = 40.1536 \times \frac{\pi}{200}$ قطریات $= 0.200768\pi$ قطریات۔

20. **مثال 1:** ایک مثلث کے زوایا **ترتیبِ اکائی**[11] پہ مرتب ہیں، و سب سے چھوٹے زاویہ کے مرتبات کی تعداد و سب سے بڑے زاویہ کے قطریات کی تعداد کا تناسب ہے 40:π۔

اب تمام زوایا کے درجات بتاو۔

فرض کرو کہ وہ زوایا ہیں (ح-س)°، ح°، (ح+س)°۔

چونکہ تینوں زوایا کا اجتماع 180° ہے،

تو 180 = (ح-س)+ح+(ح+س) = ح-س+ح+ح+س = 3ح ۔

تو ح = $\frac{180}{3}$ = 60۔

لہذا زوایا مطلوب ہوئے

(60-س)°، 60°، (60+س)°،

اب (60-س)° = $\frac{10}{9}$ × (60-س)^م،

و (60+س)° = $\frac{\pi}{180}$ × (60+س) قطریات

لہذا $\frac{10}{9}$ (60-س) : $\frac{\pi}{180}$ (60+س) :: 40 : π،

$$\therefore \frac{200}{\pi}\,\frac{60-\text{س}}{60+\text{س}} = \frac{40}{\pi}$$

یعنی 5(60-س) = 60+س،

یعنی س = 40،

لہذا زوایا مطلوب 20°، 60°، 100° ہیں۔

---

[11] ترتیب اکائی سے میری مراد یہ ہے کہ ایک متوالیہ کے ہر عدد و اس کے بعد والے عدد میں متساوی فرق ہو، جیسے 1، 2، 3، ...؛ 1، 4، 7، ...؛ 30، 60، 90، ... وغیرہ۔

مثال 2: معشّرِ[12] منتظم کے زاویہ کی مقدار کو پیمائش زاویہ کے تینوں نظاموں میں تعبیر کرو۔

اقلیدس 1-32 سے لازم ہے کہ کسی مضلع کے تمام زوایا داخلی چار قائمات کے ساتھ متساوی ہوتے ہیں اتنے قائمات کے دو گنے کے جتنے اس مضلع میں اضلاع ہیں۔

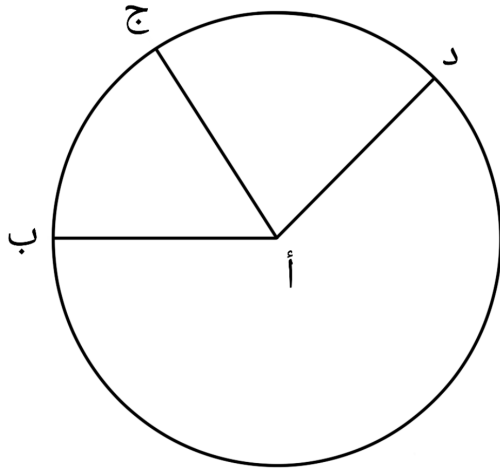
فرض کرو کہ معشر کا ایک زاویہ متضمِّن ہے ح قائمات کو، تو تمام زوایا ایک ساتھ متضمن ہوئے 10ح قائمات کو۔

تو لازم مذکور کے مطابق ہوا 10ح+4 = 20،

تو ح = $\frac{8}{5}$ قائمات،

لیکن 1 قائمہ = 90° = 100م = $\frac{\pi}{2}$ قطریات،

لہذا زاویۂ مطلوب ہوا 144° = 160م = $\frac{\pi 4}{5}$ قطریات۔

21. **مکتسب:** کسی زاویہ میں تعدادِ قطریہ ایسے کسر کے متساوی ہوتی ہے جس کا مافوق وہ قطعہ ہو جو وہ زاویہ کسی دائرہ کے مرکز سے بنائے، و ماتحت اس دائرہ کا نصف قطر ہو۔

فرض کرو کہ بأد ایک زاویہ ہے جو بنا ہے اس خط سے جو أب سے چلی و گھوم کے مقام أد پہ پہونچی۔

پھر أ کو مرکز بنا کے کسی بھی بُعد سے ایک دائرہ بناو جو خطوط أب و أد کو نقاط أ و د پہ کاٹے۔

[12] معشر وہ مضلع ہے جس میں دس اضلاع ہوں۔

فرض کرو کہ زاویہ بأج ایک قطریہ ہے، تو قطعہ بج متساوی ہوا نصف قطر أب کے۔

و اقلیدس 6-33 کے مطابق ہوا

$$\frac{\angle \text{بأد}}{\text{1 قطریہ}} = \frac{\angle \text{بأد}}{\angle \text{بأج}} = \frac{\text{قطعہ بد}}{\text{قطعہ بج}} = \frac{\text{قطعہ بد}}{\text{نصف قطر}}$$

تو $\angle \text{بأد} = \frac{\text{قطعہ بد}}{\text{نصف قطر}} \times 1$ قطریہ،

تو مکتسبِ مذکور ثابت ہوا۔

22. **مثال 1:** ایک 3 اقدام نصف قطر والے دائرہ کے مرکز میں بنا ہوا ایسا زاویہ بتاو جو 1 قدم طول کا قطعہ بنائے۔

زاویہ میں تعداد قطریہ = $\frac{\text{قطعہ}}{\text{نصف قطر}} = \frac{1}{3}$،

لہذا زاویہ = $\frac{1}{3}$ قطریہ = $\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{\pi}$ قائمہ = $\frac{2}{3\pi} \times 90° = \frac{60°}{\pi} = 19\frac{1}{11}°$،

π کو $\frac{22}{7}$ کے متساوی ماننے پہ۔

مثال 2: 5 اقدام نصف قطر والے ایک دائرہ میں اس قطعہ کا طول کیا ہوگا جو دائرہ کے مرکز میں '15 °33 کا زاویہ بنائے؟

اگر طول مطلوب ح اقدام ہوں،

تو $\frac{\text{ح}}{5}$ = قطریات کی تعداد '15 °33 میں،

$= \frac{33\frac{1}{4}}{180}\pi$ (مضمون 19)

$= \frac{133}{720}\pi$،

$\therefore$ ح = $\frac{133}{144}\pi$ اقدام = $\frac{133}{144} \times \frac{22}{7}$ اقدام تقریبا،

= $2\frac{65}{72}$ اقدام تقریبا۔

مثال 3: فرض کرو کہ آفتاب سے زمیں کی مسافت اوسطًا 92500000 میل ہے، و آفتاب زمیں پہ ایک آدمی کی آنکھ میں '32 کا زاویہ بناتا ہے۔ تو قطر آفتاب کیا ہوا۔

فرض کرو کہ ق قطر آفتاب ہے میل میں۔

و جو زاویہ آفتاب نے بنایا وہ بہت چھوٹا ہے، و اس کا قطر تقریبا اس دائرہ کے ایک بہت چھوٹے قطعہ کے متساوی ہے جس کا مرکز دیکھنے والے کی آنکھ ہے۔ و آفتاب اس دائرہ کے مرکز میں '32 کا زاویہ بنائے ہے۔

لہذا مضمون 21 کے مطابق ہوا

$\frac{ق}{92500000}$ = تعداد قطریات '32 میں،

= تعداد قطریات $\frac{8}{15}°$ میں،

= $\frac{8}{15} \times \frac{\pi}{180} = \frac{2\pi}{675}$

$\therefore$ ق = $\frac{185000000}{675}\pi$ میل،

= $\frac{185000000}{675} \times \frac{22}{7}$ میل تقریبا،

= 862000 میل تقریبا۔

مثال 4: فرض کرو کہ ایک شخص اتنی دوری پہ لکھے ہوئے کو پڑھ سکتا ہے، کہ حروف اس کی آنکھو میں '5 کا زاویہ بنائیں۔ تو بتاو کہ ان حروف کی بلندی کیا ہوگی جو وہ پڑھ سکتا ہے (1) 12 اقدام پہ، (2) ایک میل کے چوتھائی پہ؟

فرض کرو کہ ح بلندئے مطلوب ہے اقدام میں۔

پہلے مسئلہ میں ح تقریباً 12 اقدام نصف قطر والے دائرہ کے ایسے قطعہ کے متساوی ہے، جو ا، $\frac{ح}{12}$ کے مرکز میں '5 کا زاویہ بنائے۔

لہذا = تعداد قطریات '5 میں

$= \frac{1}{12} \times \frac{\pi}{180}$ ،

∴ ح = $\frac{\pi}{180}$ اقدام = $\frac{1}{180} \times \frac{22}{7}$ اقدام تقریبا

= $\frac{1}{15} \times \frac{22}{7}$ انگوٹھے = $\frac{1}{5}$ انگوٹھے تقریبا۔

و دوسرے مسئلہ میں بلندی س ہوگی

$\frac{س}{3\times440}$ = تعداد قطریات '5 میں

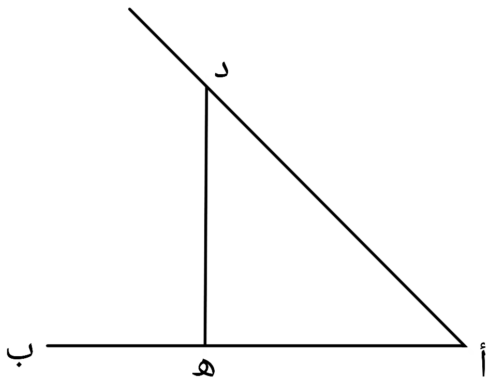
$= \frac{1}{12} \times \frac{\pi}{180}$ ،

تو س = $\frac{11}{18}\pi$ = $\frac{11}{18} \times \frac{22}{7}$ اقدام تقریبا

= قریبا 23 انگوٹھے۔

باب 2

قائمہ سے چھوٹے زوایا کے تناسبات تثلیثی۔

23. اس باب میں ہم خالص ان زوایا کی بحث کریں گے جو قائمہ سے چھوٹے ہیں۔

فرض کرو کہ ایک خطِ دورانی أد أب سے چلی و مقام أد پہ پہنچی، تو اس نے زاویہ بأد بنایا۔

اب خط دورانی میں کوئی بھی نقطہ د لے لو و اس سے خط دھ بناو جو خط ابتدائی أب پہ عمود ہو۔

تو زاویہ ھأد میں أد **وتر** ہے، دھ **عمود** ہے، أھ **قاعدہ** ہے۔

تو زاویہ بأد کے، تناسبات تثلیثی یا دالات، ہوئے،

$\frac{\text{ھد}}{\text{أد}}$ یعنی $\frac{\text{عمود}}{\text{وتر}}$ ، و اسے زاویہ بأد کا **سائن** کہیں گے، ⌜سِئْ⌝

$\frac{\text{أھ}}{\text{أد}}$ یعنی $\frac{\text{قاعد}}{\text{وتر}}$ ، و اسے زاویہ بأد کا **ہمسائن** کہیں گے، ⌜ہَسْ⌝

$\frac{\text{ھد}}{\text{أھ}}$ یعنی $\frac{\text{عمود}}{\text{قاعد}}$ ، و اسے زاویہ بأد کا **مماس** کہیں گے، ⌜مَسْ⌝

$\frac{\text{أھ}}{\text{ھد}}$ یعنی $\frac{\text{قاعد}}{\text{عمود}}$ ، و اسے زاویہ بأد کا **قلب مماس** کہیں گے، ⌜قَمَسْ⌝

$\frac{\text{أد}}{\text{هد}}$ یعنی $\frac{\text{وتر}}{\text{عمود}}$ ، و اسے زاویہ بأد کا **قلب سائن** کہیں گے، ⌝قَسِیْ⌜

$\frac{\text{أد}}{\text{أھ}}$ یعنی $\frac{\text{وتر}}{\text{قاعد}}$ ، و اسے زاویہ بأد کا **قلب ہمسائن** کہیں گے[13]۔ ⌝قَہَسْ⌜

وہ مقدار جو 1 سے ہمسائن کم کرنے پہ آئے، یعنی 1 - ہس بأد، اس کو ہم بأد کا **عکس سائن** کہیں گے ⌝عَسِیْ⌜۔ و 1 - سیِ بأد، یعنی وہ جو 1 سے سائن کم کرنے پہ آئے، اس کو ہم **عکس ہمسائن** کہیں گے ⌝عَہَسْ⌜۔

24. یہ بات خوب یاد رہے کہ تمام تناسباتِ تثلیثی اعداد ہیں۔ و ان آٹھ تناسبات کے رموز یہاں توضیح کے لیے لکھے جا رہے ہیں۔ **سیِ بأد، ہس بأد، مس بأد، قمس بأد، قسیِ بأد، قہس بأد، عسیِ بأد، عہس بأد** حسب ترتیب۔ و آخری دو تناسبات کا استعمال بہت کم ہوتا ہے۔

25. تعریفات سے ظاہر ہے کہ قلبِ سائن سائن کا مقلوب ہے، تو ہوا

$$\text{قسیِ بأد} = \frac{1}{\text{سیِ بأد}}$$

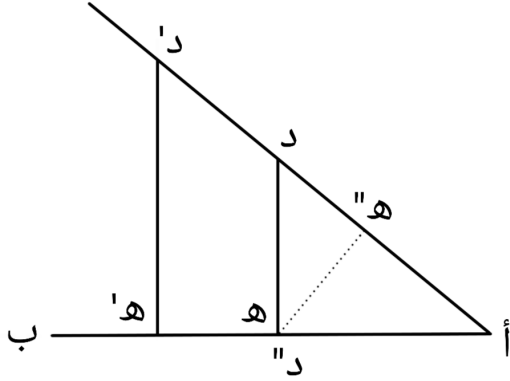
و قلبِ ہمسائن ہمسائن کا مقلوب ہے، تو ہوا

$$\text{قہس بأد} = \frac{1}{\text{ہس بأد}}$$

و قلبِ مماس مماس کا مقلوب ہے، تو ہوا

$$\text{قمس بأد} = \frac{1}{\text{مس بأد}}$$

[13] ان سطروں میں مجھ سے غلطی سے "قاعدہ" کے بجائے "قاعد" ہو گیا ہے۔

26. دلیل کہ ایک زاویہ کے تناسباتِ تثلیثی ہمیشہ یکساں ہوتے ہیں۔

اس میں ہمیں یہ دکھانا ہے کہ اگر خط دورانی أد میں دیگر کسی نقطہ د' سے ایک خط د'ھ' بنائیں جو أب پہ عمود ہو، تو تناسبات جو مثلث أد'ھ' سے حاصل ہوں گے، وہ یکساں ہوں گے ان کے جو حاصل ہوئے مثلث أدھ سے۔

خیر دونوں مثلثات کے وہ زوایا جو أ پہ ہےں تو وہ مشترک ہیں، و زوایا جو ھ و ھ' پہ ہیں وہ دونوں قائمات ہیں تو متساوی ہیں۔

لہذا دونوں مثلثات متساویٔ زوایا ہوئے، لہذا اقلیدس 6-4 کے مطابق ہوا $\frac{\text{ھد}}{\text{أد}} = \frac{\text{ھ'د'}}{\text{أد'}}$

یعنی زاویہ بأد کا سائن ہمیشہ یکساں ہوگا خواہ ہم خط دورانی کے کسی بھی نقطہ کو لے لیں۔

چونکہ اسی مقدمہ سے معلوم ہوا کہ

$$\frac{\text{أھ}}{\text{أد}} = \frac{\text{أھ'}}{\text{أد'}} \quad \text{و} \quad \frac{\text{ھد}}{\text{أھ}} = \frac{\text{ھ'د'}}{\text{أھ'}}$$

تو لازم ہے کہ خط دورانی پہ چاہے جو نقطہ اختیار کیا جائے ہمسائن و مماس بھی ہمیشہ یکساں رہیں گے۔ و اسی طرح دیگر تناسبات ہیں۔

و اگر أب کو خط دورانی فرض کیا جائے، و اس میں ایک نقطہ د" لیا جائے و اس سے أد پہ عمود د"ھ" بنایا جائے، تو مثلث أد"ھ" سے حاصل ہونے والے دالات کی قیمت مثل پہلے کی ہوگی۔

چونکہ دونوں مثلثات أدھ و أد"ھ" میں دو زوایا د"أھ" و أھ"د" حسب ترتیب متساوی ہیں دأھ و أھد کے، و یہ دونوں مثلثات متساوئ زوایا ہیں، لہذا یکساں ہیں۔

تو حاصل ہوا $\frac{\text{ھ"د"}}{\text{أد"}} = \frac{\text{ھد}}{\text{أد}}$ و $\frac{\text{أھ"}}{\text{أد"}} = \frac{\text{أھ}}{\text{أد}}$ ۔

27. ایک زاویہ کے تناسبات تثلیثی کے درمیان کی بنیادی نسبتیں۔

اب ہم دیکھیں گے کہ اگر کسی زاویہ کے تناسبات تثلیثی میں سے ایک بھی معلوم ہو تو ہر دیگر کی مقدار عددی معلوم ہو جائے گی۔

فرض کرو کہ ص سے زاویہ بأد مراد ہے (مضمون 23 کے رسمہ میں)،

تو مثلث بأد میں، اقلیدس 1-47 کے مطابق، حاصل ہوا

ھد^2 + أھ^2 = أد^2 ....(1)

لہذا أد^2 سے تقسیم کر کے حاصل ہوا

$$\left(\frac{\text{ھد}}{\text{أد}}\right)^2 + \left(\frac{\text{أھ}}{\text{أد}}\right)^2 = 1$$

یعنی (سی ص)^2 + (ہس ص)^2 = 1،

لیکن مقدار (سی ص)^2 کو ہمیشہ سی^{2}ص لکھا جاتا ہے، و ایسے ہی دیگر مقادیر کو بھی۔

لہذا یہ نسبت ہوئی **سی^{2}ص+ہس^{2}ص = 1** ....(2)

پھر مساوات (1) کے دونوں جوانب کو أھ^2 سے تقسیم کر کے حاصل ہوا

$$\left(\frac{\text{ھد}}{\text{أھ}}\right)^2 + 1 = \left(\frac{\text{أد}}{\text{أھ}}\right)^2$$

یعنی (مس ص)^2 + 1 = (قہس ص)^2،

تو ہوا **قہس^{2}ص = 1 + مس^{2}ص** ....(3)

پھر مساوات (1) کے دونوں جوانب کو هد^2 سے تقسیم کیا تو حاصل ہوا

$$1 + \left(\frac{\text{أھ}}{\text{هد}}\right)^2 = \left(\frac{\text{أد}}{\text{هد}}\right)^2$$

یعنی $1 + (\text{قمسص})^2 = (\text{قسیص})^2$،

تو ہوا **$\text{قسی}^2\text{ص} = 1 + \text{قمس}^2\text{ص}$** ....(4)

پھر چونکہ $\text{سیص} = \frac{\text{هد}}{\text{أد}}$ و $\text{ہسص} = \frac{\text{أھ}}{\text{أد}}$،

تو ہوا $\frac{\text{سیص}}{\text{ہسص}} = \frac{\text{هد}}{\text{أد}} \div \frac{\text{أھ}}{\text{أد}} = \frac{\text{هد}}{\text{أھ}} = \text{مسص}$

لہذا $\text{مسص} = \frac{\text{سیص}}{\text{ہسص}}$ ....(5)

ایسے ہی $\text{قمسص} = \frac{\text{ہسص}}{\text{سیص}}$ ....(6)

28. **مثال 1:** ثابت کرو کہ $\sqrt{\frac{1 - \text{ہسب}}{1 + \text{ہسب}}} = \text{قسیب} - \text{قمسب}$ ۔

تو ہوا $\sqrt{\frac{1 - \text{ہسب}}{1 + \text{ہسب}}} = \sqrt{\frac{(1 - \text{ہسب})^2}{1 - \text{ہس}^2\text{ب}}}$

$$= \frac{1 - \text{ہسب}}{\sqrt{1 - \text{ہس}^2\text{ب}}} = \frac{1 - \text{ہسب}}{\text{سیب}}$$

مضمون گزشتہ کی نسبت (1) کے مطابق

$$= \frac{1}{\text{سیب}} - \frac{\text{ہسب}}{\text{سیب}} = \text{قسیب} - \text{قمسب}$$

مثال 2: ثابت کرو کہ $\sqrt{\text{قہس}^2\text{ب} + \text{قسی}^2\text{ب}}$ = مسب - قمسب

ہم دیکھ چکے ہیں کہ قہس^{2}ب = 1 + مس^{2}ب،

و قسی^{2}ب = 1 + قمس^{2}ب،

∴ قہس^{2}ب + قسی^{2}ب = مس^{2}ب + 2 + قمس^{2}ب

= مس^{2}ب + 2مسب قمسب + قمس^{2}ب

= (مسب + قمسب)^2،

تو ہوا $\sqrt{\text{قہس}^2\text{ب} + \text{قسی}^2\text{ب}}$ = مسب + قمسب۔

مثال 3: ثابت کرو کہ (قسیب - سیب)(قہسب - ہسب)(مسب + قمسب) = 1۔

عبارت مذکور ہوئی $\left(\frac{1}{\text{سیب}} - \text{سیب}\right)\left(\frac{1}{\text{ہسب}} - \text{ہسب}\right)\left(\frac{\text{سیب}}{\text{ہسب}} + \frac{\text{ہسب}}{\text{سیب}}\right)$

$$= \frac{1 - \text{سی}^2\text{ب}}{\text{سیب}} \cdot \frac{1 - \text{ہس}^2\text{ب}}{\text{ہسب}} \cdot \frac{\text{سی}^2\text{ب} + \text{ہس}^2\text{ب}}{\text{سیب ہسب}}$$

$$= \frac{\text{ہس}^2\text{ب}}{\text{سیب}} \cdot \frac{\text{سی}^2\text{ب}}{\text{ہسب}} \cdot \frac{1}{\text{سیب ہسب}}$$

= 1۔

29. تناسبات تثلیثی کی قیم کی نہایات۔

مضمون 27 کی مساوات (2) کے مطابق ہوا

سی^{2}ص + ہس^{2}ص = 1۔

اب چونکہ سی^{2}ص و ہس^{2}ص دونوں مربع ہیں، تو ضروری ہے کہ ایجابی ہوں۔ پھر چونکہ ان کا اجتماع 1 ہے، تو ان میں سے کوئی بھی 1 سے زیادہ نہیں ہو سکتا۔

[کیونکہ اگر کوئی بھی، کہ لو سی^{2}ص ، ایک سے زیادہ ہوتا تو دوسرا، کہ لو ہس^{2}ص ، لازما سلبی ہوتا، جو نا ممکن ہے۔]

لہذا نا تو سائن و نا ہی ہمسائن عدد میں 1 سے زیادہ ہو سکتا ہے۔

پھر چونکہ سیص 1 سے زیادہ نہیں ہو سکتا، تو قسیص، جو کہ متساوی ہے $\frac{1}{\text{سیص}}$ کے، وہ 1 سے کم نہیں ہو سکتا۔

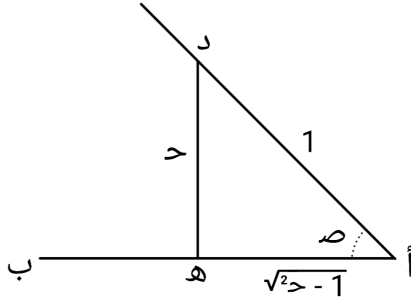
و ایسے ہی قہسص، جو کہ متساوی ہے $\frac{1}{\text{ہسص}}$ کے، وہ بھی 1 سے کم نہیں ہو سکتا۔

30. یہاں مذکور نتائج مضمون 23 کے رسمہ سے بآسانی نکالے جا سکتے ہیں۔

کہ زاویہ بأد کی قیمت چاہے جو ہو، اضلاع أھ و ھد میں سے کوئی بھی أد سے بڑا نہ ہوگا۔

اب چونکہ ھد کبھی أد سے بڑا نہیں ہو سکتا، لہذا تناسب $\frac{\text{ھد}}{\text{أد}}$ کبھی 1 سے زیادہ نہیں ہو سکتا، یعنی کسی زاویہ کا سائن کبھی 1 سے زیادہ نہیں ہو سکتا۔

و چونکہ أھ کبھی أد سے بڑا نہیں ہو سکتا لہذا تناسب $\frac{\text{أھ}}{\text{أد}}$ کبھی 1 سے زیادہ نہیں ہو سکتا، یعنی ہمسائن کبھی 1 سے زیادہ نہیں ہو سکتا۔

31. ہم ایک زاویہ کے تناسباتِ تثلیثی کو ان میں سے کسی کے بھی اعتبار سے تعبیر کر سکتے ہیں۔ و اس کا سب سے آسان طریقہ امثلہ سے نمایاں ہوتا ہے۔

مثال 1: تمام تناسباتِ تثلیثی کو سائن سے تعبیر کرنا۔

فرض کرو کہ بأد کوئی زاویہ ص ہے، و أد کا طول 1 ہے، و ھد کا طول ح ہے، تو اقلیدس 1-47 کے مطابق ہوا،

$$\text{أھ} = \sqrt{\text{أد}^2 - \text{ھد}^2} = \sqrt{1 - \text{ح}^2}$$

لہذا

$$\text{سیص} = \frac{\text{ھد}}{\text{أد}} = \frac{\text{ح}}{1} = \text{ح}$$

$$\text{ہسص} = \frac{\text{أھ}}{\text{أد}} = \sqrt{1 - \text{ح}^2} = \sqrt{1 - \text{سیص}^2}$$

$$\text{مسص} = \frac{\text{ھد}}{\text{أھ}} = \frac{\text{ح}}{\sqrt{1 - \text{ح}^2}} = \frac{\text{سیص}}{\sqrt{1 - \text{سیص}^2}}$$

$$\text{قمسص} = \frac{\text{أھ}}{\text{ھد}} = \frac{\sqrt{1 - \text{ح}^2}}{\text{ح}} = \frac{\sqrt{1 - \text{سیص}^2}}{\text{سیص}}$$

$$\text{قسیص} = \frac{\text{أد}}{\text{ھد}} = \frac{1}{\text{ح}} = \frac{1}{\text{سیص}}$$

$$\text{قہسص} = \frac{\text{أد}}{\text{أھ}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \text{ح}^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \text{سیص}^2}}$$

آخری پانچ مساوات ہمارا مطلوب ہیں۔

مثال 2: تمام تناسباتِ تثلیثی کو قلب مماس میں تعبیر کرنا۔

فرض کرو کہ ھد 1 ہے، و أھ س ہے، تو اقلیدس 1-47 کے مطابق ہوا

$$\text{أد} = \sqrt{\text{أھ}^2 + \text{ھد}^2} = \sqrt{1 + \text{س}^2}$$

لہذا $\text{قمسص} = \frac{\text{أھ}}{\text{ھد}} = \frac{\text{س}}{1} = \text{س}$

$$\text{سیص} = \frac{\text{ھد}}{\text{أد}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \text{س}^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \text{قمسص}^2}}$$

$$\text{ہسص} = \frac{\text{أھ}}{\text{أد}} = \frac{\text{س}}{\sqrt{1 + \text{س}^2}} = \frac{\text{قمسص}}{\sqrt{1 + \text{قمسص}^2}}$$

$$\text{مسص} = \frac{\text{ھد}}{\text{أد}} = \frac{1}{\text{س}} = \frac{1}{\text{قمسص}}$$

$$\text{قہسص} = \frac{\text{أد}}{\text{أھ}} = \frac{\sqrt{1 + \text{س}^2}}{\text{س}} = \frac{\sqrt{1 + \text{قمسص}^2}}{\text{قمسص}}$$

$$\text{قسیص} = \frac{\text{أد}}{\text{ھد}} = \frac{\sqrt{1 + \text{س}^2}}{1} = \sqrt{1 + \text{قمسص}^2}$$

آخری پانچ مساوات ہمارا مطلوب ہیں۔

خیال رہے کہ، ہر مسئلہ میں، وہ کسر جس سے تناسب تثلیثی کو تعبیر کیا گیا ہے اس کا ماتحت 1 ہے۔ مثلا سائن ھد\أد ہوتا ہے تو مثال 1 میں ماتحت أد کو 1 فرض کیا؛ و قلبِ مماس أھ\ھد ہوتا ہے تو مثال 2 میں ضلع ھد کو 1 فرض کیا۔

اسی طرح اگر ہمیں دیگر تناسبات کو ہمسائن سے تعبیر کرنا ہوتا، تو چونکہ ہمسائن متساوی ہے أھ\أد کے، تو ہم أد کو 1 بناتے و أھ کو ف ، پھر باقی عمل مثل امثلۂ 1 و 2 کے کرتے۔

خیر آنے والی امثلہ میں اضلاع کی قیم رقمی[14] ہیں۔

مثال 3: اگر ہسص متساوی ہے 3\5 کے، تو دیگر تناسبات کی قیم بتاو۔

اولا خط ابتدائی أب میں سے أھ کو 3 کے متساوی فرض کرو، و اس پہ ایک عمود ھد کھڑا کرو۔

و فرض کرو کہ طول 5 کی ایک خط نقطہ أ کے گرد گھومی، یہاں تک کہ اس کا دوسرا سرا اس عمود سے نقطہ د پہ ملا، تو بأد ہوا زاویہ ص ۔

اقلیدس 1-47 کے مطابق ہوا ھد = $\sqrt{\text{أد}^2 - \text{أھ}^2}$ = $\sqrt{5^2 - 3^2} = 4$

لہذا سیص = $\frac{4}{5}$ ، مسص = $\frac{4}{3}$ ، قمس = $\frac{3}{4}$ ، قسیہ = $\frac{5}{4}$ ، قہسص = $\frac{5}{3}$ ۔

مثال 4: فرض کرو کہ ص ایک زاویہ ہے جس کا سائن 1\3 ہے، تو دیگر تناسبات تثلیثی کی مقدارِ عددی معلوم کرو۔

یہاں سیص = $\frac{1}{3}$ ، تو مضمون 27 کی نسبت (2) کے مطابق ہوا

$$\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \text{ہس}^2\text{ص} = 1$$

$$\text{یعنی}\quad \text{ہس}^2\text{ص} = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9}$$

[14] تعبیر کے اعتبار سے اعداد کی دو اقسام ہیں: عدد رقمی جو خاص رقمِ عدد سے تعبیر کیا جائے جیسے 0، 1، 2، 3،...؛ و عدد حرفی جو حروف سے تعبیر کیا جائے جیسے ح ، π وغیرہ۔ تو قیمت رقمی سے مراد وہ قیمت ہوئی جو عدد رقمی سے تعبیر ہو۔

یعنی ہسص = $\frac{\sqrt{2}\ 2}{3}$

لہذا مسص = $\frac{\text{سیص}}{\text{ہسص}} = \frac{1}{\sqrt{2}\ 2} = \frac{\sqrt{2}}{4}$

قمسص = $\frac{1}{\text{مسص}} = \sqrt{2}\ 2$

قسیص = $\frac{1}{\text{سیص}} = 3$

قہسص = $\frac{1}{\text{ہسص}} = \frac{3}{\sqrt{2}\ 2} = \frac{\sqrt{2}\ 3}{4}$

عسیص = 1 - ہسص = $1 - \frac{\sqrt{2}\ 2}{3}$

عہسص = 1 - سیص = $1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$.

32. جدولِ درج ذیل میں ہر تناسب تثلیثی ہر دیگر کے اعتبار سے تعبیر ہے۔

	سیص	ہسص	مسص	قمسص	قہسص	قسیص
سیص	سیص	$\sqrt{1-\text{ہسص}^2}$	$\frac{\text{مسص}}{\sqrt{1+\text{مسص}^2}}$	$\frac{1}{\sqrt{1+\text{قمسص}^2}}$	$\frac{\sqrt{\text{قہسص}^2-1}}{\text{قہسص}}$	$\frac{1}{\text{قسیص}}$
ہسص	$\sqrt{1-\text{سیص}^2}$	ہسص	$\frac{1}{\sqrt{1+\text{مسص}^2}}$	$\frac{\text{قمسص}}{\sqrt{1+\text{قمسص}^2}}$	$\frac{1}{\text{قہسص}}$	$\frac{\sqrt{\text{قسیص}^2-1}}{\text{قسیص}}$
مسص	$\frac{\text{سیص}}{\sqrt{1-\text{سیص}^2}}$	$\frac{\sqrt{1-\text{ہسص}^2}}{\text{ہسص}}$	مسص	$\frac{1}{\text{قمسص}}$	$\sqrt{\text{قہسص}^2-1}$	$\frac{1}{\sqrt{\text{قسیص}^2-1}}$
قمسص	$\frac{\sqrt{1-\text{سیص}^2}}{\text{سیص}}$	$\frac{\text{ہسص}}{\sqrt{1-\text{ہسص}^2}}$	$\frac{1}{\text{مسص}}$	قمسص	$\frac{1}{\sqrt{\text{قہسص}^2-1}}$	$\sqrt{\text{قسیص}^2-1}$
قہسص	$\frac{1}{\sqrt{1-\text{سیص}^2}}$	$\frac{1}{\text{ہسص}}$	$\sqrt{1+\text{مسص}^2}$	$\frac{\sqrt{1+\text{قمسص}^2}}{\text{قمسص}}$	قہسص	$\frac{\text{قسیص}}{\sqrt{\text{قسیص}^2-1}}$
قسیص	$\frac{1}{\text{سیص}}$	$\frac{1}{\sqrt{1-\text{ہسص}^2}}$	$\frac{\sqrt{1+\text{مسص}^2}}{\text{مسص}}$	$\sqrt{1+\text{قمسص}^2}$	$\frac{\text{قہسص}}{\sqrt{\text{قہسص}^2-1}}$	قسیص

33. بعض مسائل مفیدہ میں تناسبات تثلیثی کی قیم۔ و ان میں سے زاویہ 45° ہے۔

فرض کرو کہ زاویہ بأد 45° ہے۔

پھر چونکہ مثلث کے تینوں زوایا ایک ساتھ دو قائمات کے متساوی ہوتے ہیں،

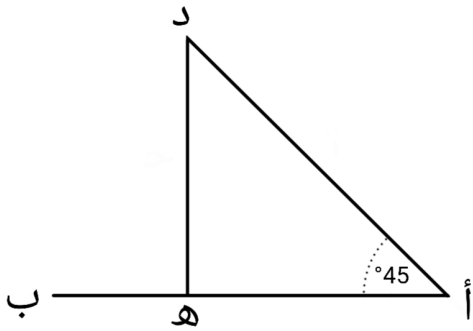
تو ∠أدھ = 180° - ∠دأھ - ∠دھأ = 180° - 45° - 90° = 45° = ∠دأھ۔

∴ أھ = ھد = ح(کہ لو)

و أد = $\sqrt{\text{أھ}^2 + \text{ھد}^2}$ = $\sqrt{2}$ح

∴ سي 45° = ھد / أد = ح / ح$\sqrt{2}$ = $\frac{1}{\sqrt{2}}$

ہس 45° = أھ / أد = ح / ح$\sqrt{2}$ = $\frac{1}{\sqrt{2}}$

مس 45° = ھد / أھ = ح / ح = 1

34. زاویۂ 30°۔

فرض کرو کہ زاویہ بأد 30° ہے۔

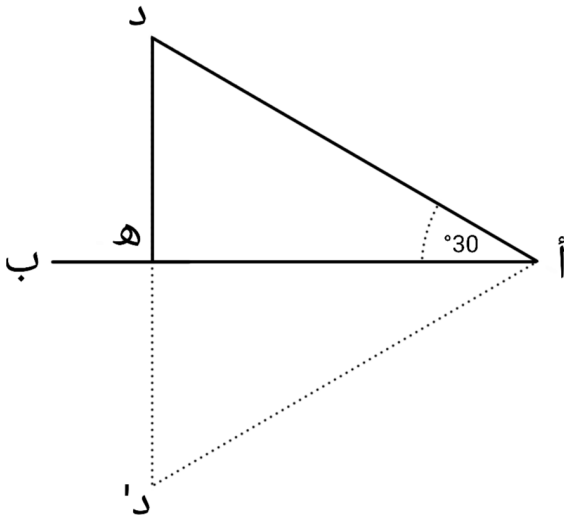
پھر دھ کو د' تک نکالو، ھد' کو دھ

کے متساوی رکھتے ہوئے۔

چونکہ دونوں مثلثات أھد و أھد'

کے جوانب أھ و ھد' متساوی ہیں

أھ و ھد کے، و جن زوایا کو وہ

گھیرے ہیں وہ بھی متساوی ہیں۔

لہذا   أد' = أد، و ∠أد'د = ∠أدد' = 60°، لہذا مثلث دأد' متساویٔ اضلاع ہوا۔

لہذا $أد^2 = دد'^2 = 4دھ^2 = 4أد^2 - 4ح^2$،

جبکہ أھ = ح ۔

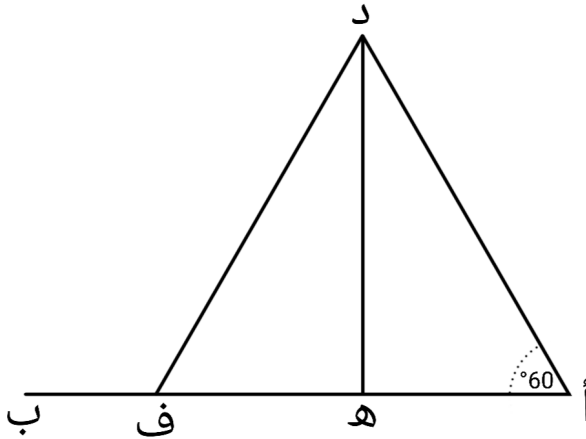
$\therefore \quad 3أد^2 = 4ح^2$،

تو ہوا $أد = \frac{2ح}{\sqrt{3}}$ ، $ھد = \frac{1}{2} أد = \frac{ح}{\sqrt{3}}$

$$\therefore \quad \text{سیٖ } 30° = \frac{ھد}{أد} = \frac{1}{2}$$

$$\text{ہس } 30° = \frac{أھ}{أد} = ح \div \frac{2ح}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{مس } 30° = \frac{\text{سیٖ } 30°}{\text{ہس } 30°} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

35.   زاویۂ 60°

فرض کرو کہ زاویہ بأد 60° ہے۔

خط أب میں ایک نقطہ ف لو، اس طور پہ کہ

ھف = أھ = ح(کہ لو)۔

تو دونوں مثلثات أھد و فھد کے دو اضلاع أھ و ھد متساوی ہوئے دو اضلاع فھ و ھد کے حسب ترتیب، و ان کے زوایا بھی متساوی ہوئے، لہذا دونوں مثلثات متساوی ہیں۔

∴ دف = أد، و ∠دفھ = ∠دأھ = 60°،

لہذا مثلث أدف متساوی اضلاع ہوا، لہذا

$$\text{أد} = \text{أف} = 2\text{أھ} = 2\text{حـ}$$

$$\therefore\ \text{ھد} = \sqrt{\text{أد}^2 - \text{أھ}^2} = \sqrt{4\text{حـ}^2 - \text{حـ}^2} = \sqrt{3}\,\text{حـ}$$

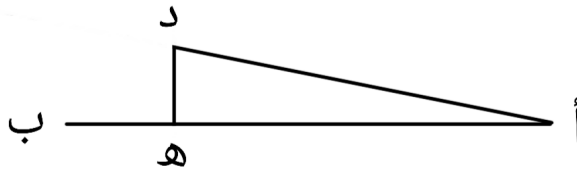
لہذا

$$\text{سیٔ}\ 60^\circ = \frac{\text{ھد}}{\text{أد}} = \frac{\sqrt{3}\,\text{حـ}}{2\text{حـ}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{ہسہ}\ 60^\circ = \frac{\text{أھ}}{\text{أد}} = \frac{\text{حـ}}{2\text{حـ}} = \frac{1}{2}$$

$$\text{مسہ}\ 60^\circ = \frac{\text{سیٔ}\ 60^\circ}{\text{ہسہ}\ 60^\circ} = \sqrt{3}$$

36. زاویۂ 0°

فرض کرو کہ خط دورانی أد ایک بہت چھوٹا زاویہ گھومی، تو زاویہ ھأد بہت چھوٹا ہوا۔

و تب ضلع ھد کی مقدار بھی بہت کم ہوئی، جو أد کے اتنا زاویہ گھومنے کے قبل جسے ہم محسوس کر سکیں، ہر اس مقدار سے کم تھی جسے ہم فرض کر سکیں، یعنی وہ جسے ہم 0 سے مراد لیتے ہیں۔

و اس مسئلہ میں، دو نقاط ھ و د تقریباً منطبق ہیں، و بأد جتنا چھوٹا ہوگا وہ دونوں نقاط اتنا ہی قریب ہوں گے۔

لہذا جب زاویہ بأد صفر ہوگا، تو دو اضلاع أھ و أد متساوی ہوں گے، و ضلع ھد صفر ہوگا۔

لہذا سیہ $0° = \frac{\text{ھد}}{\text{أد}} = \frac{0}{\text{أد}} = 0$

ہسہ $0° = \frac{\text{أھ}}{\text{أد}} = \frac{\text{أد}}{\text{أد}} = 1$

مسہ $0° = \frac{0}{1} = 0$

قمسہ $0° = \frac{\text{أھ}}{\text{ھد}}$ کی قیمت جبکہ ھ و د ایک دوسرے پہ منطبق ہوں،

= تناسب ایک مقدار متناہی کا ایسی چیز سے جو بلا نہایہ چھوٹی ہو

= ایک مقدار جو بلا نہایہ بڑی ہو۔

و ایسی مقدار کو رمز ∞ سے تعبیر کیا جاتا ہے۔

لہذا قمسہ $0° = \infty$

ایسے ہی قسیہ $0° = \frac{\text{أد}}{\text{ھد}} = \infty$

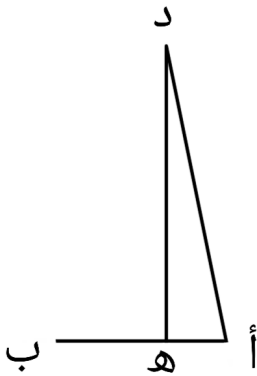
قہسہ $0° = \frac{\text{أد}}{\text{أھ}} = 1$

37. زاویۂ 90°

فرض کرو کہ زاویہ بأد قائمہ کے بہت قریب ہے، لیکن قائمہ نہیں ہے۔

لیکن جب أد قائمہ بنائے گی، تو نقطہ ھ نقطہ أ پہ منطبق ہوگا، تو ضلع أھ 0 ہوگا، و أد و ھد متساوی ہوں گے۔

لہذا سیہ $90° = \frac{\text{ھد}}{\text{أد}} = \frac{\text{أد}}{\text{أد}} = 1$

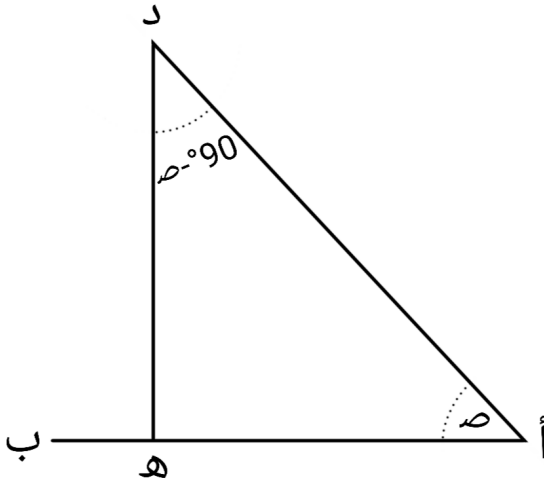
ہسہ $90° = \frac{\text{أھ}}{\text{أد}} = \frac{0}{\text{أد}} = 0$

$$\text{مس } 90^\circ = \frac{\text{هد}}{\text{أه}} = \frac{\text{ایک مقدار متناہی}}{\text{ایک بلا نہایہ چھوٹی مقدار}}$$

$$= \text{بلا نہایہ بڑا عدد} = \infty$$

$$\text{قمس } 90^\circ = \frac{\text{أه}}{\text{هد}} = \frac{0}{\text{هد}} = 0$$

$$\text{قہس } 90^\circ = \frac{\text{أد}}{\text{أه}} = \infty$$ ، جیسا کہ مماس میں ہے،

$$\text{قسیِ } 90^\circ = \frac{\text{أد}}{\text{هد}} = \frac{\text{أد}}{\text{أد}} = 1$$

38. **تعریفِ زوایا اِتمامی:** ایسے دو زوایا کو اتمامی کہا جاتا ہے جن کا اجتماع ایک قائمہ ہو۔ لہذا ص و 90°-ص ایک دوسرے کے اتمامی ہوئے۔

39. دو زوایا اتمامی کے تناسبات تثلیثی کے درمیان کی نسبتیں معلوم کرنا۔

فرض کرو کہ ایک خط دورانی أب سے چلی و ایک زاویۂ حادہ بأد بنایا، متساوی ص کے۔ پھر اس خط دورانی کے کسی بھی نقطہ د سے دھ عمود بنایا أب پہ۔

چونکہ مثلث کے تینوں زوایا ایک ساتھ دو قائمات کے متساوی ہوتے ہیں، و زاویہ أهد ایک قائمہ ہے، تو دو زوایا هأد و أدھ کا اجتماع ایک قائمہ ہوا۔

لہذا وہ دونوں ایک دوسرے کے اتمامی ہوئے، و ∠أدھ = 90°-ص ،

[جب زاویہ أدھ ملحوظ ہوگا، تو ضلع دھ قاعدہ ہوگا و هأ عمود ہوگا]

و تب ہوگا

سیہ(90°-ص) = سیہ هدأ = $\frac{\text{هأ}}{\text{دأ}}$ = ہسہ بأد = ہسہ ص ،

ہسہ(90°-ص) = ہسہ هدأ = $\frac{\text{دھ}}{\text{دأ}}$ = سیہ بأد = سیہ ص ،

مسہ(90°-ص) = مسہ هدأ = $\frac{\text{هأ}}{\text{دھ}}$ = قمسہ بأد = قمسہ ص ،

قمسہ(90°-ص) = قمسہ هدأ = $\frac{\text{دھ}}{\text{هأ}}$ = مسہ بأد = مسہ ص ،

قسیہ(90°-ص) = قسیہ هدأ = $\frac{\text{دأ}}{\text{هأ}}$ = قہسہ بأد = قہسہ ص ،

قہسہ(90°-ص) = قہسہ هدأ = $\frac{\text{دأ}}{\text{دھ}}$ = قسیہ بأد = قسیہ ص ۔

تو ہم نے دیکھا کہ

کسی زاویہ کا سائن = اس کے اتمامی کا ہمسائن،

و کسی زاویہ کا مماس = اس کے اتمامی کا قلب مماس،

کسی زاویہ کا قلب سائن = اس کے اتمامی کا قلب ہمسائن،

40. طالب کو آگے بڑھنے سے قبل درج ذیل جدول سے خوب مانوس ہو جانا چاہیے۔
[اس جدول کے مطول کے لیے مضمون 76 دیکھو۔]

زوایا	0°	30°	45°	60°	90°
سائن	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
ہمسائن	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
مماس	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	∞
قلب مماس	∞	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0
قلب سائن	∞	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	1
قلب ہمسائن	1	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{2}$	2	∞

اگر طالب جدول مذکور میں نشان دہی کیے ہوئے جز کو یاد کر لے، تو باقیوں کو وہ بآسانی حاصل کر سکتا ہے۔

(1) 60° و 90° کے سائن حسب ترتیب 30° و 0° کے ہمسائن ہیں۔ (مضمون 39)

(2) 60° و 90° کے ہمسائن حسب ترتیب 30° و 0° کے سائن ہیں۔ (مضمون 39)

(3) کسی زاویہ کا مماس اس کے سائن کو اس کے ہمسائن سے تقسیم کرنے کا نتیجہ ہے۔

تو چوتھی سطر کی کوئی بھی مقدار اس کے مناسب دوسری سطر کی مقدار کو، اس کے مناسب تیسری سطر کی مقدار سے تقسیم کر کے حاصل کی جا سکتی ہے۔

(4) چونکہ کسی زاویہ کا قلب مماس اس کے مماس کا مقلوب ہوتا ہے، تو پانچویں سطر کی مقادیر ان کے مناسب چوتھی سطر کی مقادیر کا قلب ہوں گی۔

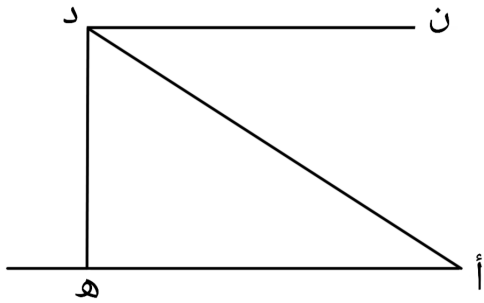
(5) چونکہ قسیہ ص = $\frac{1}{\text{سیہ ص}}$، تو چھٹویں سطر دوسری سطر کی مناسب مقادیر کو قلب کر کے حاصل ہو گی۔

(6) چونکہ قہسہ ص = $\frac{1}{\text{ہسہ ص}}$، تو ساتویں سطر طریقۂ گزشتہ سے تیسری سطر سے حاصل ہو گی۔

باب 3

مسافت و بلندی کے مسائل بسیطہ۔

41. علم تثلیث کی ایک غایت ہے دو نقاط کے درمیان کی مسافت کو یا کسی چیز کی بلندی کو بنا ان کی پیمائش کیے معلوم کرنا۔

42. فرض کرو کہ أ و د دو نقاط ہیں، و د أ سے بلند ہے۔ و فرض کرو کہ أھ ایک **خطِ اُفُقی** ہے، جو أ سے گزر کر نقطہ ھ پہ ایک **خطِ عُمُودی** سے ملی ہے، جو د سے گزری ہوئی ہے۔ تو زاویہ ھأد کو أ کے لحاظ سے د کا **زاویۂ مرفوع** کہا جائے گا۔
پھر ھأ کے متوازی خط دن بناو کہ وہ د سے گزرنے والی خط افقی ہو جائے۔ تو زاویہ ندأ د کے لحاظ سے أ کا **زاویہ مخفوض** ہوا۔

43. مزوات و سدسیہ دو ایسے آلات ہیں جو افعال عملی میں استعمال کیے جاتے ہیں۔ و مزوات سطح عمودی میں زوایا کی پیمائش کے لیے ہے۔ و اس کی شکل ابسط یہ ہے کہ ایک دوربین ایک چپٹی لکڑی کے ٹکڑے سے جڑی ہوتی ہے جو تین پائے پہ ٹکا ہوتا ہے و ایسے مرتب کیا جا سکتا ہے کہ خط افقی کے بالکل متوازی ہو جائے۔

تو یہ میز افقا أ پہ رکھو و دوربین کے نظر اولا أھ کی جہت میں کرو، پھر اسے ایک سطح عمودی میں گھماو یہاں تک کہ وہ بالکل د کو دیکھنے لگے۔ تو ایک پیمانۂ درجہ بند وہ زوایہ نمایا کرے گا جو دوربین نے خط افقی سے بنایا ہے، یعنی زاویۂ مرفوع ھأد۔

و ایسے ہی اگر اس آلہ گو د پہ رکھو تو زاویہ ھدأ جس سے دوربین خط افقی سے نیچے کے جانب گھومے گی وہ زاویۂ پستی ہوگا۔

و اس آلہ کو سطحِ افقی میں بھی زوایا کی پیمائش کے لیے استعمال کیا جا سکتا ہے۔

44. **سدسیہ**[15] دو نقاط د و ھ سے کسی تیسرے نقطہ ف پہ بنّے والے زوایہ کو معلوم کرنے کے لیے استعمال کیا جاتا ہے۔ یہ آلہ بحری جہازوں میں خوب استعمال ہوتا ہے۔ و اس کی صورت و غایت یہاں بیان کرنے کے لیے کافی پیچیدہ ہے۔

45. اب ہم بلندی و مسافت کے بعض مسائل حل کریں گے۔

مثال 1: ایک چھنڈے کا ڈنڈا ایک سطح افقی پہ سیدھا کھڑا ہے، و اس کی جڑ سے 150 قدم دور ایک نقطہ سے اس کے اوپری سرے کا زاویۂ مرفوع °30 ہے۔ تو بتاو کہ اس ڈنڈے کی بلندی کیا ہے۔

فرض کرو کہ ھد (رسمۂ مضمون 42) سے مراد ڈنڈۂ جھنڈا ہے و أ وہ نقطہ ہے جس کے لحاظ سے زاویۂ مرفوع لیا گیا ہے۔

تو أھ = 150 قدم، و ے ھأد = °30

[15] سدسیہ کا موجد ابو محمود خجندی ہے 1000 بعد عیسی۔

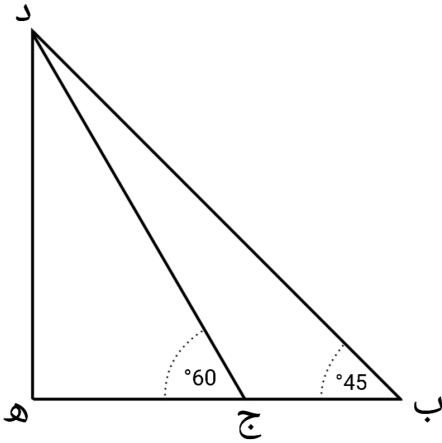
چونکہ دھأ قائمہ ہے تو ہوا

$$\frac{\text{ھد}}{\text{أھ}} = \text{مس ھأد} = \text{مس } 30° = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \text{(مضمون 33)}$$

$$\therefore \text{ ھد} = \frac{\text{ھأ}}{\sqrt{3}} = \frac{150}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3} \times 150}{3} = 50\sqrt{3}$$

اب جذر مربع حل کر کے حاصل ہوا $\sqrt{3} = 1.73205...$

لہذا ھد = 50 × ...1.73205 قدم = ...86.6025 قدم۔

مثال 2: ایک شخص ایک منارِ مسجد کی بلندی جاننا چاہتا ہے جو ایک سطح افقی پہ قائم ہے۔ و اس نے اس سطح افقی پہ ایک مقام سے سرۂ اعلی کا زاویۂ مرفوع 45° پایا، پھر 100 قدم منار کے قریب جانے پہ اس نے زاویۂ مرفوع 60° پایا۔ تو منار کی بلندی و منار کی جڑ سے اس شخص کی پہلی دوری بتاو۔

فرض کرو کہ د منار کا سرۂ اعلی ہے، و ب و ج دو نقاط ہیں جن سے زوایا مرفوع لیے گیے ہیں۔ پھر خط بج کو نکالو و اس پہ دھ عمود بناو، و دھ کو ح فرض کرو۔

و معلوم ہے کہ بج = 100 قدم،

و ∠ دھبد = 45°،

و ∠ دھجد = 60°،

$$\text{و } \frac{\text{بھ}}{\text{ح}} = \text{قمس } 45° = 1$$

و $\frac{\text{جھ}}{\text{ح}}$ = قمسہ 60° = $\frac{1}{\sqrt{3}}$

تو بھ = ح و جھ = $\frac{\text{ح}}{\sqrt{3}}$

∴ 100 = بھ - جھ = ح - $\frac{\text{ح}}{\sqrt{3}}$ = ح $\frac{1-\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$

∴ ح = $\frac{\sqrt{3}\ 100}{1-\sqrt{3}}$ = $\frac{(1+\sqrt{3})\ \sqrt{3}\ 100}{1-3}$ = 50 $(\sqrt{3}+3)$

= 50 [3 + ...1.73205] = 236.6 اقدام۔

چونکہ بھ = ح ، تو دونوں مسافات مطلوب ...236.6 قدم کے متساوی ہوئیں۔

مثال 3: ایک 200 قدم اونچی چوٹی کے اوپر سے ایک منار کے سرۂ اعلی و ادنی کے زوایا مخفوض 30° و 60° پائے گیے۔ تو منار کی بلندی بتاو۔

فرض کرو کہ ب نقطۂ نظر ہے و بج چوٹی کی بلندی ہے، و فرض کرو کہ کل منار ہے۔

تو افقاً بم بناو، کہ

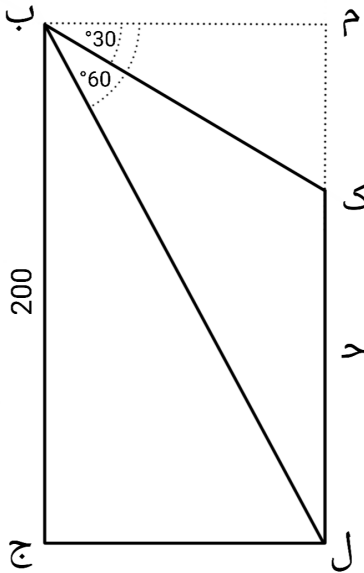
∠مبک = 30° و ∠مبل = 60°۔

و فرض کرو کہ منار کی بلندی ح قدم ہے، و خط لک کو نکالو و بم سے نقطہ م پہ ملاو، تاکہ

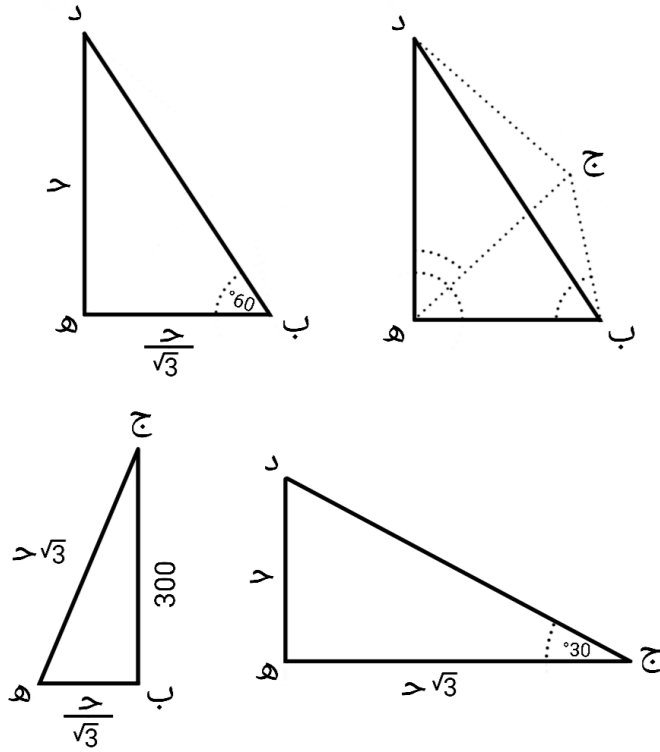
کم = بج - ح = 200 - ح

چونکہ ∠بلج = ∠لبم = 60° (اقلیدس 1-29)۔

∴ لج = بج قمسہ بلج = 200 قمسہ 60° = $\frac{200}{\sqrt{3}}$

و $\frac{200 - \text{ح}}{\text{لج}} = \frac{\text{کم}}{\text{مب}} = \text{مس } 30° = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$\therefore 200 - \text{ح} = \frac{\text{لج}}{\sqrt{3}} = \frac{200}{3}$

تاکہ $\text{ح} = 200 - \frac{200}{3} = 133\frac{1}{3}$ قدم۔

مثال 4: ایک شخص نے ایک منار کے جنوب میں کسی مقام سے اس کے زاویۂ بلندی کو 60° پایا، پھر وہ وہاں سے 300 قدم مغرب میں گیا، سطح افقی میں، و تب اس نے زاویۂ بلندی کو 30° پایا۔ تو منار کی بلندی و منار سے اس سخص کی پہلی دوری بتاو۔

فرض کرو کہ د منار کا سرۂ اعلی ہے، و دھ اس کی بلندی ہے، و ب اس کے جنوب کا نقطۂ معلوم ہے، و ج ب کے غرب کا نقطہ ہے۔ تو زوایا دھب، دھج، ھبج قائمات ہوئے۔ چونکہ مثلثات دھب، دھج، بھج مختلف سطوح میں ہیں، لہذا انہیں دوسرے و تیسرے و چوتھے رسمات میں بنایا گیا ہے۔

و معلوم ہے کہ بج = 300 قدم، ﮱدبھ = °60، ﮱدجھ = °30۔

اب فرض کرو کہ منار کی بلندی ح قدم ہے۔

تو دوسرے رسمہ سے $\frac{\text{بھ}}{\text{ح}}$ = قمس °60 = $\frac{1}{\sqrt{3}}$

تو بھ = $\frac{\text{ح}}{\sqrt{3}}$

و تیسرے رسمہ سے $\frac{\text{جھ}}{\text{ح}}$ = قمس °30 = $\sqrt{3}$

تو جھ = $\sqrt{3}$ ح

و آخری رسمہ سے جھ^2 = بھ^2 + بج^2

یعنی 3ح^2 = $\frac{1}{3}$ح^2 + 300^2

∴ 8ح^2 = 3×300^2

∴ ح = $\frac{300}{2}\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = 150\frac{\sqrt{6}}{2} = 75 \times \sqrt{6}$

= $75 \times 2.44949... = 183.71$ قدم۔

و منار سے اس کی مسافت

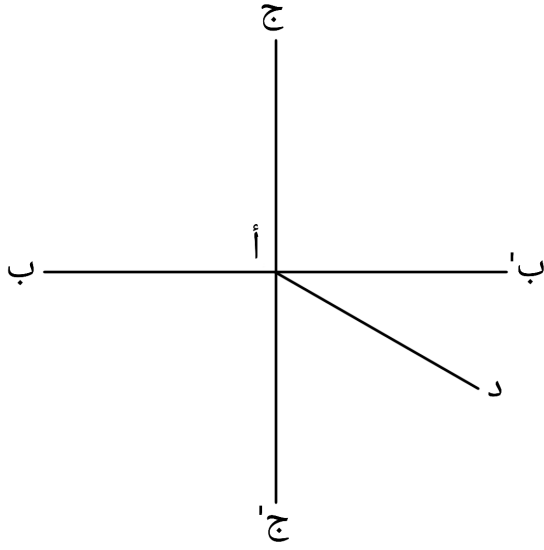
= ح قمس °60 = $\frac{\text{ح}}{\sqrt{3}} = 75 \times \sqrt{2}$

= $75 \times (1.4142...) = 106.605...$ قدم۔

باب 4

رموز جبری کا تثلیث میں جاری کرنا۔

46. **زوایا ایجابی و سلبی:** مضمون 6 میں زاویہ کی کسی بھی مقدار کے بارے میں بحث کرنے میں ہم نے خط دورانی کا ذکر کیا تھا، اس طور پہ کی وہ ہمیشہ گھڑی کی سوئی کے گھومنے کی جہت میں گھومتی ہے جبکہ گھڑی کا چہرہ اوپر ہو۔ اس جہت کو ہم **جہتِ گھڑی** کہیں گے۔ و جب خط دورانی اس طرح گھومے تو کہا جائے گا کہ وہ جہت ایجابی میں گھومی و زاویۂ ایجابی بنایا۔ و جب اس جہت کے خلاف میں گھومے تو کہا جائے گا کہ وہ جہت سلبی میں گھومی و زاویۂ سلبی بنایا۔ تو یہ جہتِ سلبی جہت گھڑی کی ضد ہوئی۔

47. فرض کرو کہ خط دورانی أب سے چلی و گھومی یہاں تک کہ ایک مقام أد تک پہنچی، جو أب' و أج' کے درمیان ہے، و زاویہ ب'أج' کو کاٹ رہی ہے۔
تو اب اگر یہ خط جہت ایجابی میں گھومی ہے تو اس نے ایجابی زاویہ بنایا ہے جس کی مقدار +255°، و اگر جہت سلبی میں گھومی ہے تو اس نے سلبی زاویہ بنایا ہے جس کی مقدار -135°۔

پھر فرض کرو کہ ہمیں فقط خط دورانی کا مقام معلوم ہے۔ تو ممکن ہے کہ اس نے ایک، دو، تین، ... مکمل دوران کیا ہو پھر +225° کا زاویہ بنایا؛ و ممکن ہے کہ ایک، دو، تین، ... دوران جہت سلبی میں مکمل کیا پھر زاویۂ سلبی -135° بنایا۔

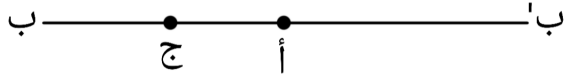
پہلے مسئلہ میں جو زاویہ اس نے بنایا وہ ہوگا 225° یا 360° + 225° یا 2 × 360° + 225° یا 3 × 360° + 225° ......، یعنی 225° یا 585° یا 945° یا 1305° ......؛ و دوسرے مسئلہ میں جو زاویہ اس نے بنایا وہ ہوگا -135° یا - 360° - 135° یا - 2 × 360° - 135° یا - 3 × 360° - 135° ......، یعنی -135° یا -495° یا -855° یا -1215° ...... ۔

48. **خطوط ایجابی و سلبی:** ایک شخص ایک سڑکِ مستقیم پہ ایک سنگِ میل سے چلا و 1000 گز مکمل کر کے رکا۔ تو جب تک ہمیں معلوم نہ ہو کہ وہ کس جانب چلا ہم اس کے رکنے کا مقام نہیں جان سکتے۔ و جو کچھ ہم جانتے ہیں وہ یہ کہ وہ یا تو 1000 گز ایک جہت میں چلا یا اتنی ہی مقدار دوسری جہت میں۔

لہذا ایک خط مستقیم پہ پیمایش مسافت کے لیے مناسب ہے کہ ایک جہت معیاری ہو؛ و اس جہت کو جہت ایجابی کہا جاتا ہے، و جو بھی مسافت اس میں ناپی جاتی ہے وہ بھی ایجابی کہلاتی ہے۔ و جو جہت اس کے خلاف ہے وہ جہت سلبی ہے، و ہر مسافت جو اس میں ناپی گئی وہ بھی سلبی ہے۔

خطوط افقی کی جہت معیاری یا ایجابی بائیں طرف ہوتی ہے۔ لہذا طول أب جہت ایجابی میں ہے، و طول أب' جہت سلبی میں ہے۔

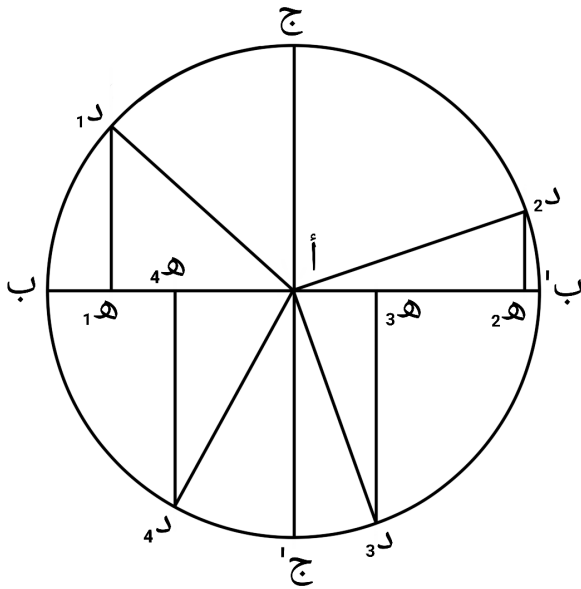
تو اگر أب و أب' میں سے ہر ایک کے طول کی مقدار ء (عین مقطوع) ہے، تو نقطہ ب أ سے +ء کی مسافت پہ ہے و نقطہ ب' أ سے -ء کی مسافت پہ ہے۔

تو ہر خط جس کی پیمائش بائیں طرف کی جائے اس میں رمز ایجابی سابق ہو گا، و ہر خط جس کی پیمائش دائیں طرف کی جائے اس میں رمز سلبی سابق ہو گا۔

ب' أ ج ب

تو اگر ایک نقطہ أ سے چلا و ایک مسافت ایجابی أب تمام کیا جو متساوی ہے ء کے، و پھر واپس أ کے جانب ایک مسافت بج تمام کیا جو متساوی ہے ۏ کے، تو کل مسافت جو اس نے جہت ایجابی میں مکمل کیا وہ ہوئی أب + بج

یعنی +ء + (-ۏ) یعنی ء-ۏ۔

49. جو خطوط بب' کو قائمہ سے کاٹیں ان کی جہت ایجابی أ سے اوپر کے جانب ہے یعنی أج کی جہت (رسمۂ مضموں 47)۔ و وہ خطوط جن کی پیمائش أ سے نیچے کے جانب کی گئی یعنی أج' کی جہت میں تو وہ سلبی ہیں۔

50. کسی بھی مقدار عددی[16] کے زاویہ کا تناسب تثلیثی۔

فرض کرو کہ أب خط اول ہے (جس کو جہت ایجابی میں بنایا)، و فرض کرو کہ أب کی جہتِ متضاد میں أب' ہے، و فرض کرو کہ جأج' أب پہ زاویۂ قائمہ سے ایک خط مستقیم ہے جس کی جہت ایجابی أج ہے، و فرض کرو کہ خط دورانی أد أب سے چلی و کسی جانب، ایجابی یا سلبی، میں گھومی و کسی مقدار عددی کا زاویہ بنایا۔ اب خط دورانی کے نقطہ د سے بأب' پہ عمود دھ بناو۔

[رسمہ میں خط دورانی کے چار مقامات مذکور ہیں، چاروں ربع میں سے ہر ایک میں ایک مقام، و تمییز کے لیے د میں 1، 2، 3، 4 لاحق کیے گیے ہیں۔]

تو ہمیں آیندہ تعریفات حاصل ہوئیں، جو مشابہ ہیں ان کے جو مضمون 23 میں زاویۂ حادہ کے مسائل بسیطہ کے لیے گزریں۔

$\frac{\text{ھد}}{\text{أد}}$ زاویہ بأد کا **سائن** کہلاتا ہے

$\frac{\text{أھ}}{\text{أد}}$ زاویہ بأد کا **ہمسائن** کہلاتا ہے

$\frac{\text{ھد}}{\text{أھ}}$ زاویہ بأد کا **مماس** کہلاتا ہے

$\frac{\text{أھ}}{\text{ھد}}$ زاویہ بأد کا **قلب مماس** کہلاتا ہے

[16] مقدار سے اکائی کو ساقط کرنے کے بعد جو عدد خالص باقی رہے وہ مقدار عددی ہے۔

$\frac{\text{أد}}{\text{أھ}}$ زاویہ بأد کا **قلب ہمسائن** کہلاتا ہے

$\frac{\text{أد}}{\text{ھد}}$ زاویہ بأد کا **قلب سائن** کہلاتا ہے

مقادیر (1 - ہمسائن بأد) و (1 - سائن بأد) کو **عکس سائن** و **عکس ہمسائن** کہیں گے۔

51. بالکل مضمون 27 کے مثل، یہ دکھایا جا سکتا ہے کہ زاویہ بأد (=ص) کی ہر قیمت لیے ہوگا کہ

$\text{سی}^2\text{ص} + \text{ہس}^2\text{ص} = 1$،

$\frac{\text{سیص}}{\text{ہسص}} = \text{مسص}$ ،

$\text{قہس}^2\text{ص} = 1 + \text{مس}^2\text{ص}$ ،

$\text{قسی}^2\text{ص} = 1 + \text{قمس}^2\text{ص}$.

52. تناسبات تثلیثی کے رموز۔

پہلا ربع: فرض کرو کہ خط دورانی أد_1 کے مثل پہلے ربع میں ہے۔ و خط دورانی ہمیشہ ایجابی ہوتی ہے۔ پھر چونکہ یہاں أھ_1 و $\text{ھ}_1\text{د}_1$ دونوں ایجابی ہیں تو تناسبات تثلیثی ایجابی ہوں گے۔

دوسرا ربع: دوسرے ربع کی خط دورانی کو أد_2 کے مثل فرض کرو۔ و یہاں $\text{ھ}_2\text{د}_2$ ایجابی ہے و أھ_2 سلبی ہے۔

تو سائن مقدار ایجابی و مقدار ایجابی کا تناسب ہونے کی وجہ سے ایجابی ہوگا،

و ہمسائن مقدار سلبی و مقدار ایجابی کا تناسب ہونے کی وجہ سے سلبی ہوگا،

و مماس مقدار ایجابی و مقدار سلبی کا تناسب ہونے کی وجہ سے سلبی ہوگا،

و قلب مماس سلبی ہوگا،

و قلب سائن ایجابی ہوگا،

و قلب ہمسائن سلبی ہوگا۔

تیسرا ربع: اگر خط دورانی أد$_3$ کے مثل تیسرے ربع میں ہو، تو ھ$_3$د$_3$ و أد$_3$ دونوں سلبی ہوں گے۔

تو سائن سلبی ہوگا

و ہمسائن سلبی ہوگا

و مماس ایجابی ہوگا

و قلب مماس ایجابی ہوگا

و قلب سائن سلبی ہوگا

و قلب ہمسائن سلبی ہوگا

چوتھا ربع: فرض کرو کہ خط دورانی چوتھے ربع میں ہے، مثل أد$_4$ کے۔

و یہاں ھ$_4$د$_4$ سلبی و أھ$_4$ ایجابی ہوگا۔

تو سائن سلبی ہوگا

و ہمسائن ایجابی ہوگا

و مماس سلبی ہوگا

و قلب مماس سلبی ہوگا

و قلب سائن سلبی ہوگا

و قلب ہمسائن ایجابی ہوگا

جدول درج ذیل اس ربع کے مطابق تناسبات تثلیثی کے رموز کو نمایا کرتی ہے جس میں وہ خط دورانی ہو جو اس زاویہ کو گھیرے ہو جو موضوع بحث ہے۔

ج

سیہ	+	سیہ	+
ہسہ	−	ہسہ	+
مسہ	−	مسہ	+
قمسہ	−	قمسہ	+
قسیہ	+	قسیہ	+
قہسہ	−	قہسہ	+

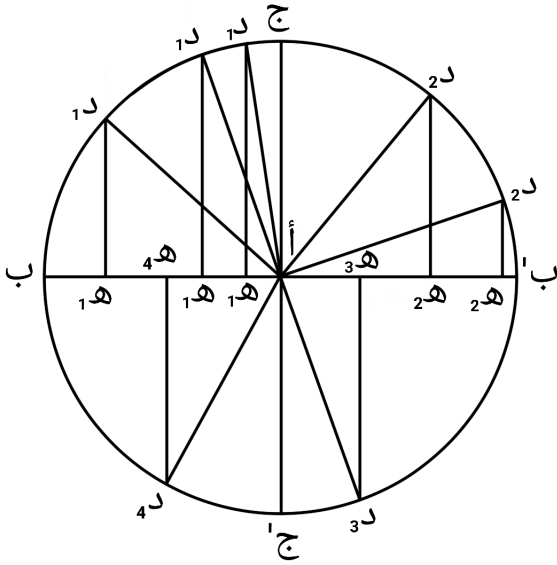
ب' ———— أ ———— ب

سیہ	−	سیہ	−
ہسہ	−	ہسہ	+
مسہ	+	مسہ	−
قمسہ	+	قمسہ	−
قسیہ	−	قسیہ	−
قہسہ	−	قہسہ	+

ج'

53. زاویہ کے 0° سے 360° تک بڑھنے کے ساتھ تناسبات تثلیثی کے رمز و مقدار عددی میں تغیرات کو تلاشنا۔

فرض کرو کہ خط دورانی أد ایک مستقل طول ء کی خط ہے۔

تو جب وہ أب پہ منطبق ہوئی تو طول أھ$_1$ متساوی ہوا ء کے، و جب وہ أج پہ منطبق ہوئی، تو نقطہ ھ$_1$ منطبق ہوا أ پہ و أھ$_1$ ختم ہو گیا۔ تو جیسے جیسے خط دورانی أب سے أج پہ گئی ویسے ویسے مسافت أھ$_1$ ء سے کم ہوکے صفر ہو گئی۔

و جب خط دورانی دوسرے ربع میں گئی و أج سے أب' تک گھومی، تو مسافت أهـ$_2$ سلبی پائی گئی و 0 سے ع تک زیادہ ہوئی [یعنی 0 سے -ع تک کم ہوئی]۔

پھر تیسرے ربع میں مسافت أهـ$_3$ -ع سے 0 تک زیادہ ہوئی، و چوتھے ربع میں مسافت أهـ$_4$ 0 سے ع تک زیادہ ہوئی۔

پہلے ربع میں طول هـ$_1$د$_1$ 0 سے ع تک زیادہ ہوا، و دوسرے ربع میں هـ$_2$د$_2$ ع سے 0 تک کم ہوا، و تیرے ربع میں هـ$_3$د$_3$ 0 سے -ع تک کم ہوا، و چوتھے ربع میں هـ$_4$د$_4$ -ع سے 0 تک زیادہ ہوا۔

54. **سائن:** پہلے ربع میں جیسے جیسے زاویہ 0° سے 90° تک زیادہ ہوا، ویسے ویسے سائن $\frac{\text{هـ}_1\text{د}_1}{\text{ع}}$ بھی $\frac{0}{\text{ع}}$ سے $\frac{\text{ع}}{\text{ع}}$ تک زیادہ ہوا، یعنی 0 سے 1 تک۔

دوسرے ربع میں جیسے جیسے زاویہ 90° سے 180° تک زیادہ ہوا، ویسے ویسے سائن $\frac{\text{ع}}{\text{ع}}$ سے $\frac{0}{\text{ع}}$ تک کم ہوا، یعنی 1 سے 0 تک۔

تیسرے ربع میں جیسے جیسے زاویہ 180° سے 270° تک زیادہ ہوا، ویسے ویسے سائن $\frac{0}{\text{ع}}$ سے $-\frac{\text{ع}}{\text{ع}}$ تک کم ہوا، یعنی 0 سے -1 تک۔

چوتھے ربع میں جیسے جیسے زاویہ 270° سے 360° تک زیادہ ہوا، ویسے ویسے سائن $-\frac{\text{ع}}{\text{ع}}$ سے $\frac{0}{\text{ع}}$ تک زیادہ ہوا، یعنی -1 سے 0 تک۔

55. **ہمسائن:** پہلے ربع میں ہمسائن جو $\frac{\text{أھ}}{\text{ع}}$ کے متساوی ہے، $\frac{\text{ع}}{\text{ع}}$ سے $\frac{0}{\text{ع}}$ تک کم ہوا، یعنی 1 سے 0 تک۔

و دوسرے ربع میں $\frac{0}{\text{ع}}$ سے -$\frac{\text{ع}}{\text{ع}}$ تک کم ہوا، یعنی 0 سے -1 تک۔

و تیسرے ربع میں -$\frac{\text{ع}}{\text{ع}}$ سے $\frac{0}{\text{ع}}$ تک زیادہ ہوا، یعنی -1 سے 0 تک۔

و چوتھے ربع میں $\frac{0}{\text{ع}}$ سے $\frac{\text{ع}}{\text{ع}}$ تک زیادہ ہوا، یعنی 0 سے 1 تک۔

56. **مماس:** پہلے ربع میں $\text{ھ}_1\text{د}_1$ 0 سے ع تک زیادہ ہوئی، و أھ_1 ع سے 0 تک کم ہوئی، تو $\frac{\text{ھ}_1\text{د}_1}{\text{أھ}_1}$ استمرارا زیادہ ہوا (کیونکہ اس کا مافوق استمراراً زیادہ ہوا و ماتحت استمرارا کم ہوا)۔

جب خط أد_1 أب پہ منطبق ہوئی، تو مماس 0 ہوا؛ و جب خط دورانی ایسا زاویہ گھومی جو قائمہ سے زرا سا کم ہو تو أد_1 تقریباً أج پہ منطبق ہوئی۔ تو $\text{ھ}_1\text{د}_1$ تقریبا ع کے متساوی ہوئی و أھ_1 بہت چھوٹی ہوئی، تو تناسب $\frac{\text{ھ}_1\text{د}_1}{\text{أھ}_1}$ بہت بڑا ہوا، پھر أد_1 أج کے جتنا قریب ہوگی یہ تناسب اتنا بڑا ہوگا، تو خط دورانی کو أج کے قریب فرض کر کے ہم جتنا چاہے اتنا بڑا مماس بنا سکتے ہیں۔ و یہی ثابت ہوتا ہے ہمارے قول سے کہ جب زاویہ $90°$ کے متساوی ہو تو مماس غیر متناہی ہوگا۔ و رمز ∞ سے بلا نہایہ بڑی مقدار مراد لی جاتی ہے۔

لہذا پہلے ربع میں مماس 0 سے ∞ تک زیادہ ہوتا ہے۔

و دوسرے ربع میں جب خط دورانی نے قائمہ سے زرا بڑا ایک زاویہ بأد_2 بنایا، تو $\text{ھ}_2\text{د}_2$ تقریبا ع کے قریب ہوئی، و أھ_2 سلبی و بہت چھوٹی ہویی، تو اس کا مماس بہت بڑا و سلبی ہوا۔

پھر جب خط دورانی أج سے أب' تک گھومی، تو ھ$_1$د$_1$ کم ہوئی ء سے 0 تک، و أھ$_2$ سلبی ہوئی و کم ہوئی 0 سے -ء تک، تو جب خط دورانی منطبق ہوئی أب' پہ تو مماس 0 ہوا۔

لہذا دوسرے ربع میں مماس -∞ سے 0 تک زیادہ ہوا۔

و تیسرے ربع میں ھ$_3$د$_3$ و أھ$_3$ دونوں سلبی ہوئے تو ان کا تناسب ایجابی ہوا۔ پھر جب خط دورانی أج' پہ منطبق ہوئی تو مماس غیر متناہی ہوا۔

لہذا تیسرے ربع میں مماس 0 سے ∞ تک زیادہ ہوا۔

و چوتھے ربع میں ھ$_4$د$_4$ سلبی ہوا و أھ$_4$ ایجابی ہوا، تو ان کا تناسب سلبی ہوا۔ پھر جب خط دورانی أج' سے گزری تو مماس +∞ سے -∞ میں بدل گیا [جیسے أج سے گزرنے میں ہوا تھا]۔

لہذا چوتھے ربع میں مماس -∞ سے 0 تک زیادہ ہوا۔

57. **قلب مماس:** جب خط دورانی أب پہ منطبق ہوئی، تو طول ھ$_1$د$_1$ بہت کم ہوا و أھ$_1$ تقریبا ء کے متساوی ہوا، تو قلب مماس یعنی تناسب $\frac{\text{أھ}_1}{\text{ھ}_1\text{د}_1}$ غیر نہایہ سے شروع ہوا۔

پھر جب خط دورانی أب سے أج تک گھومی تو مقدار ھ$_1$د$_1$ زیادہ ہوئی 0 سے ء تک، و أھ$_1$ کم ہوئی ء سے 0 تک۔

لہذا پہلے ربع میں قلب مماس کم ہوا ∞ سے 0 تک۔

دوسرے ربع میں ھ$_2$د$_2$ ایجابی ہوا و أھ$_2$ سلبی ہوا، تو قلب مماس کم ہوا 0 سے $-\frac{\text{ء}}{0}$ تک، یعنی 0 سے -∞۔

تیسرے ربع میں وہ ایجابی و کم ہوا ∞ سے ء تک [أب' سے گزرنے پہ خط دورانی کا قلب مماس -∞ سے ∞ میں بدل جاتا ہے]۔

چوتھے ربع میں وہ سلبی و کم ہوا 0 سے -∞ تک۔

58. **قلب ہمسائن:** جب خط دورانی أب پہ منطبق ہوئی تو أھ$_1$ کی قیمت ہوئی ء، و جب خط دورانی أب سے أج تک گھومی تو قلب ہمسائن کی قیمت ہوئی 1۔

و جب خط دورانی أب سے أج تک گھومی تو أھ$_1$ کم ہوا ء سے 0 تک۔ و جب خط دورانی أج پہ منطبق ہوئی تو قلب ہمسائن کی قیمت ہوئی $\frac{ء}{0}$ یعنی ∞۔

لہذا پہلے ربع میں قلب ہمسائن 1 سے ∞ تک زیادہ ہوا۔

دوسرے ربع میں أھ$_2$ سلبی و کم ہوا 0 سے -ء تک۔ لہذا اس ربع میں قلب ہمسائن زیادہ ہوا -∞ سے -1 تک [کیونکہ جب خط دورانی أج سے گزری تو مقدار أھ$_1$ کا رمز بدل گیا، لہذا قلب ہمسائن +∞ سے بدل کے -∞ ہو گیا]۔

تیسرے ربع میں أھ$_3$ سلبی رہا و زیادہ ہوا -ء سے 0 تک۔ لہذا قلب ہمسائن کم ہوا -1 سے -∞ تک۔

چوتھے ربع میں أھ$_4$ ایجابی ہوا و زیادہ ہوا 0 سے ء تک۔ لہذا اس ربع میں قلب ہمسائن کم ہوا ∞ سے +1 تک۔

59. **قلب سائن:** قلب سائن کے تغیر کو قلب ہمسائن کے تغیر کے مثل حاصل کیا جا سکتا ہے۔

پہلے ربع میں وہ کم ہوا ∞ سے +1 تک۔

دوسرے ربع میں وہ زیادہ ہوا +1 سے +∞ تک۔

تیسرے ربع میں وہ زیادہ ہوا -∞ سے -1 تک۔

چوتھے ربع میں وہ کم ہوا -1 سے -∞ تک۔

60. نتائج گزشتہ جدول درج ذیل میں تعبیر ہیں۔

ج

دوسرے ربع میں

سائن	1 سے 0 تک کم ہوا
ہمسائن	0 سے -1 تک کم ہوا
مماس	-∞ سے 0 تک زیادہ ہوا
قلب مماس	0 سے -∞ تک کم ہوا
قلب ہمسائن	-∞ سے -1 تک زیادہ ہوا
قلب سائن	1 سے ∞ تک زیادہ ہوا

پہلے ربع میں

سائن	0 سے 1 تک زیادہ ہوا
ہمسائن	1 سے 0 تک کم ہوا
مماس	0 سے ∞ تک زیادہ ہوا
قلب مماس	∞ سے 0 تک کم ہوا
قلب ہمسائن	1 سے ∞ تک زیادہ ہوا
قلب سائن	∞ سے 1 تک کم ہوا

ب' ب أ

تیسرے ربع میں

سائن	0 سے -1 تک کم ہوا
ہمسائن	-1 سے 0 تک زیادہ ہوا
مماس	0 سے ∞ تک زیادہ ہوا
قلب مماس	∞ سے 0 تک کم ہوا
قلب ہمسائن	-1 سے -∞ تک کم ہوا
قلب سائن	-∞ سے -1 تک زیادہ ہوا

چوتھے ربع میں

سائن	-1 سے 0 تک زیادہ ہوا
ہمسائن	0 سے 1 تک زیادہ ہوا
مماس	-∞ سے 0 تک زیادہ ہوا
قلب مماس	0 سے -∞ تک کم ہوا
قلب ہمسائن	∞ سے 1 تک کم ہوا
قلب سائن	-1 سے -∞ تک کم ہوا

ج'

61. **دور دالۂ تثلیثی:** جب ایک زاویہ 0 سے 2π قطریات زیادہ ہوا یعنی خط دورانی نے ایک دوران مکمل کیا، تو اس کا سائن اولا 0 سے 1 تک زیادہ ہوا، پھر 1 سے سلبی 1- تک کم ہوا، و پھر -1 سے 0 تک زیادہ ہوا۔ لہذا سائن اپنے تمام تغیرات سے گزر کر اپنی اول قیمت پہ آ گیا۔

ایسے ہی جب وہ زاویہ 2π قطریات سے 4π قطریات تک بڑا ہوا تب بھی سائن پہلے جیسے تغیرات سے گزرا۔ و ایسے دو زوایا جن میں چار قائمات کا فرق ہو، یعنی 2π قطریات کا، تو ان کے سائن یکساں ہوں گے۔

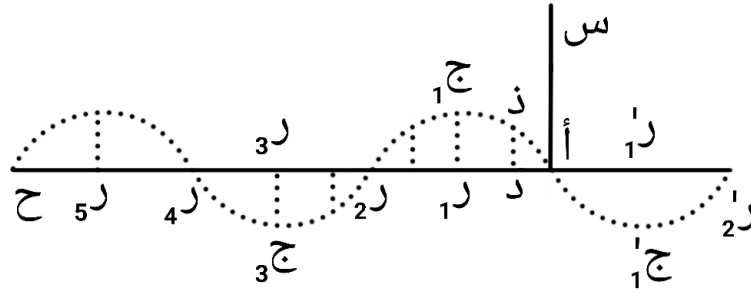
و اسے تغبیر کیا جاتا ہے اس قول سے کہ **دور سائن** π2 ہے۔

و ایسے ہی ہمسائن، قلب ہمسائن، قلب سائن بھی اپنے تمام تغیرات سے گزرتے ہیں، جب زاویہ π2 بڑھتا ہے۔

و مماس اپنے تمام تغیرات سے گزرتا ہے جب زاویہ 0 سے π قطریات زیادہ ہوتا ہے، یعنی جب خط دورانی دو قائمات سے گزرتی ہے۔ و ایسا ہی قلب مماس میں بھی ہے۔

تو سائن، ہمسائن، قلب ہمسائن و قلب سائن کا دور π2 قطریات ہوا، و مماس و قلب مماس کا دور π قطریات ہوا۔

چونکہ دالات تثلیثی کی قیم زاویہ کے بڑا ہونے کے ساتھ بار بار دوہراتی ہیں، لہذا انہیں **دالات دوری** کہیں گے۔

62. تناسبات تثلیثی کی قیمتوں کے تغیرات کو منحنی مرسوم کر کے دکھایا جا سکتا ہے جیسے آیندہ رسمات میں ہے۔

منحنی ساین: فرض کرو کہ أح و أس دو خطوط مستقیم ہیں جو قائمہ سے متصل ہیں، و فرض کرو کہ أح کی جہت میں پیمائے گیے طول سے زوایا کی مقادیر مراد ہیں۔

و فرض کرو کہ نقاط ر$_1$، ر$_2$، ر$_3$،... ایسے لیے گیے ہیں کہ مسافات أر$_1$، ر$_1$ر$_2$، ر$_2$ر$_3$،... متساوی ہوں۔ تو اگر مسافت أر$_1$ سے قایمہ مراد ہو تو مسافات أر$_2$، أر$_3$، أر$_4$،... سے لامحالہ دو، تین، چار،... قائمات مراد ہوں گے۔

پھر اگر د خط أح پہ کوئی نقطہ ہے، تو أد سے ایک زاویہ مراد ہوگا جس کا تناسب قائمہ سے وہی ہوگا جو أد کا أر$_1$ سے ہے۔

[مثلا اگر أد متساوی ہے $\frac{1}{3}$ أر$_1$ کے تو أد کو قائمہ کے ایک تہائی سے تعبیر کیا جائے گا، و اگر د ر$_3$ و ر$_4$ کو کاٹے تو أد قائمہ کے $3\frac{1}{2}$ سے تعبیر ہوگا۔]

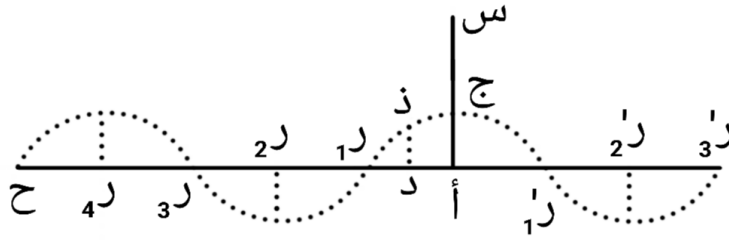
و أر$_1$ کو ایسے اختیار کرو کہ طول کی ایک اکائی سے 1 قطریہ مراد ہو، پھر چونکہ أر$_2$ سے دو قائمات مراد ہوتے ہیں، یعنی π قطریات، تو طول أر$_2$ طول ہوا π اکائیات کا، یعنی تقریبا $3\frac{1}{7}$ اکائیات کا طول۔

و ایسے ہی زوایا سلبی أر'$_1$، أر'$_2$،... کو أ سے جہت سلبی کی مسافات پہ تعبیر کیا گیا۔

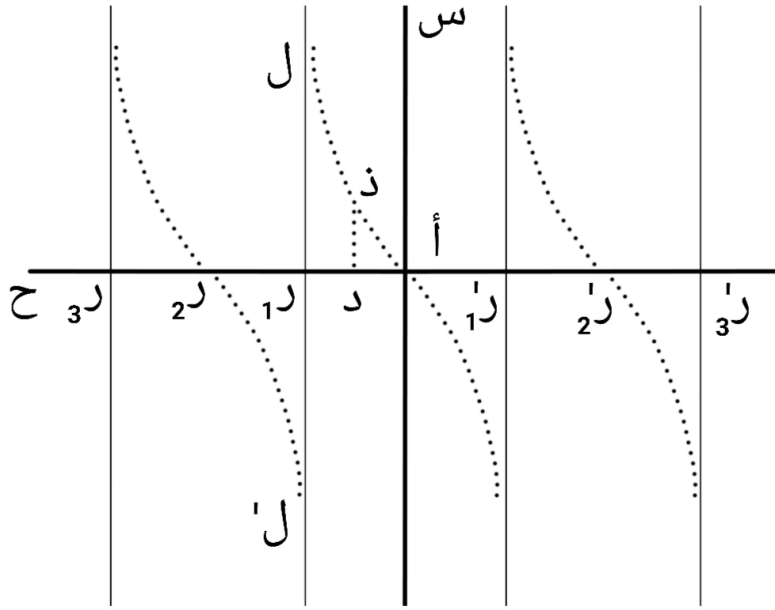
خیر، ہر نقطہ د پہ دذ عمود بناو جس سے اس زاویہ کا سائن مراد ہوگا جو أد سے مراد ہے۔ پھر اگر سائن ایجابی ہو تو عمود أس کے متوازی جہت ایجابی میں بنے گا، و اگر سائن سلبی ہو تو وہ جہت سلبی میں بنے گا۔

[مثلا، چونکہ أر$_1$ سے مراد ایک قائمہ ہے جس کا سائن 1 ہے، تو ہم نے طول کی ایک اکائی کے متساوی ایک عمود ر$_1$ج$_1$ بنایا؛ و چونکہ أر$_2$ سے دو قایمات کے متساوی زاویہ مراد ہے جس کا سائن صفر ہے، تو ہم نے طول صفر کے متساوی ایک عمود بنایا؛ و چونکہ أر$_3$ سے تین قایمات کے متساوی زاویہ مراد ہے جس کا سائن -1 ہے، تو ہم نے -1 کے متساوی ایک عمود بنایا، یعنی ر$_3$ج$_3$، نیچے کی جہت میں ایک اکائی طول کے متساوی؛ و اگر أد أر$_1$ کا ایک تہائی ہو تو قائمہ کے $\frac{1}{3}$ پہ دال ہوگا، یعنی 30°، جس کا سائن $\frac{1}{2}$ ہے، و تب ہم طول کی نصف اکائی کے متساوی ایک عمود دذ بنائیں گے۔]

تو جو خطوط بنیں ان سب کے سرے پہلے مرسوم منحنی کے مثل ایک منحنی پہ منطبق پائے گیے۔ و یہ بھی پایا گیا کہ منحنی کے ضمن میں أج$_1$ر$_2$ج$_3$ر$_4$ کے مثل اجزاء موجود ہیں جو ایک دوسرے کے اغل بغل ہیں۔ و یہ اس بات کے مناسب ہے کہ ہر مرتبہ جب زاویہ 2π بڑا ہوتا ہے، تو سائن کی قیمت دوہراتی ہے۔

63. منحنی ہمسائن:

ہمسائن کا منحنی بھی ویسے ہی حاصل ہوگا جیسے سائن کا ہوا ہے، لیکن اس مسئلہ میں عمود دذ سے مراد ہمسائن ہوگا اس زاویہ کا جو أد سے مراد ہے۔ و جو منحنی حاصل ہوگا وہ مثل اس کے ہوگا جو مضمون 62 میں مرسوم ہے اگر ہم اس منحنی میں أ کو ر$_1$ کے مقام پہ کر دیں و أس کو ر$_1$ج$_1$ پہ بنا دیں۔

64. منحنی مماس

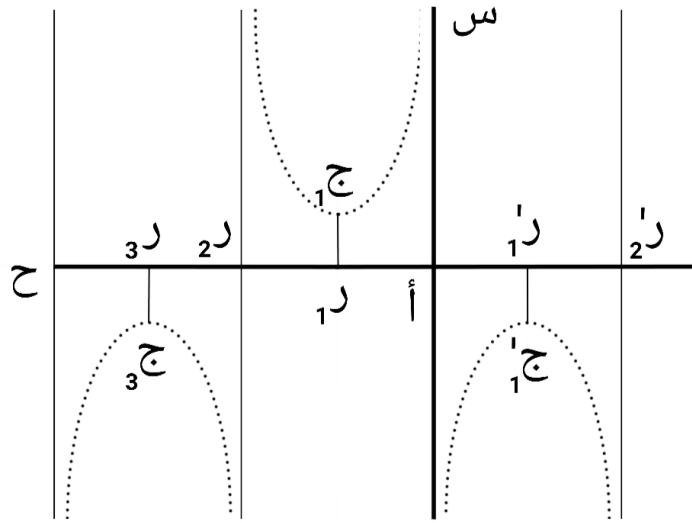
چونکہ قائمہ کا مماس غیر متناہی ہے، و أر$_1$ سے مراد قائمہ ہے، تو اس مسئلہ میں جو عمود ر$_1$ پہ بنایا جائے گا وہ بلا نہایہ طویل ہوگا، و یہ منحنی منقوط خط ر$_1$ل سے مسافت غیر متناہی پہ ملے گا۔

و چونکہ قائمہ سے زرا بڑے کسی زاویہ کا مماس سلبی ہوتا ہے، و تقریبا بلا نہایہ زیادہ ہوتا ہے، تو منحنی منقوط ل$ر_1$ل' کے فورا بعد جانب سلبی میں غیر متناہی مسافت سے شروع ہوگا۔

و واضح رہے کہ یہ منحنیٔ مماس متضمن ہوگا ایک جیسے غیر متناہی منفصل اجزاء کو۔ و ایسے منحنی کو ہم **منحنی منفصل** کہیں گے۔ و اس کے علاوہ منحنی سائن و ہمسائن دونوں **منحنی متصل** ہیں۔

65. منحنی قلب مماس

اگر اسی طرح قلب مماس کو نمایا کرنے والا منحنی بنایا جائے، تو وہ أ کے اوپر أس سے غیر متناہی مسافت پہ ملے گا۔ وہ $ر_1$ سے گزرے گا و $ر_2$ سے گزرنے والی خط عمودی کو أح کے جانب سلبی میں مسافت غیر متناہی پہ چھوئے گا۔ پھر $ر_2$ کے فوراً بعد أ کے اوپر مسافت غیر متناہی سے شروع ہوگا، و پہلے کے مثل بنے گا۔

تو یہ ایک منحنی منفصل ہے و اجزاء غیر متناہی کو متضمن ہے جو اغل بغل مرتب ہیں۔

66. **منحنی قلب سائن**

جب زاویہ 0 ہوا تو سائن بھی 0 ہوا، لہذا قلب سائن غیر متناہی ہوا، تو منحی أس سے غیر نہایہ پہ ملا۔

و جب زاویہ قائمہ ہوا تو قلب سائن 1 ہوا، و تب ر$_1$ج$_1$ طول کی اکائی کے متساوی ہوا۔

و جب وہ دو قائمات کے متساوی ہوا تو اس کا قلب سائن غیر نہایہ ہوا، تو منحنی ر$_2$ سے گزرنے والے عمود سے مسافت بغیر نہایہ پہ ملا۔

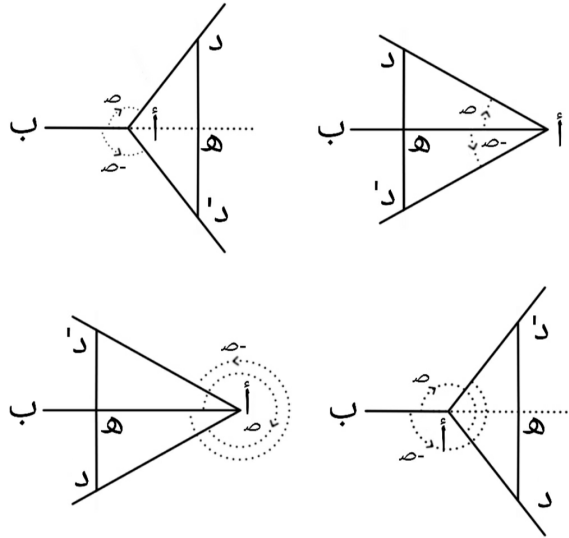
پھر جب زاویہ دو قائمات سے زرا کم سے زرا زیادہ ہوا، تو قلب سائن +∞ سے -∞ ہوا، لہذا ر$_2$ کے زرا سا آگے یہ منحنی جانب سلبی میں، یعنی أح کے نیچے، مسافت بغیر نہایہ سے شروع ہوا۔

67. قلب ہمسائن

اگر ایسے ہی منحنی قلب ہمسائن بنایا جائے تو وہ قلب سائن کے مثل ہوگا بس ہمیں اس میں أس کو رج$_1$ پہ منتقل کرنا ہوگا۔

باب 5

کسی بھی رمز و مقدار کے زوایا کے دالات تثلیثی۔

68. زاویہ (-ص) کے تناسبات تثلیثی کو ص کے تناسبات تثلیثی کے اعتبار سے حاصل کرنا، ص کی ہر قیمت کے لیے۔

فرض کرو کہ خط دورانی مقام أب سے شروع ہوئی و زاویہ ص گھومی و مقام أد پہ رکی۔ تو خط أب (یا أب سے نکلی ہوئی) پہ عمود دھ بناو جسے د' تک نکالو، یہاں تک کہ طول دھ و ھد' متساوی ہو جائیں۔

و زوایا ھأد و ھأد' میں دو اضلاع أھ و ھد متساوی ہیں أھ و ھد' کے، و ان سے گھرے ہوئے زوایا أھد و أھد' قائمات ہیں۔

لہذا (اقلیدس 1-4 سے) زوایا ھأد و ھأد' کی مقدار یکساں ہوئی، و أد متساوی ہوا أد' کے۔

تو مذکور چار رسمات میں سے ہر ایک میں، زاویہ بأد (جہت گھڑی میں ناپا ہوا) کی مقدار و زاویہ بأد' (جہت گھڑی کی ضد میں ناپا ہوا) کی مقدار یکساں ہوئیں۔ لہذا زاویہ بأد' (جہت گھڑی کی ضد میں ناپا ہوا) کو -ص سے تعبیر کیا جاتا ہے۔ و ھد و ھد' مقدار میں متساوی ہیں لیکن رمز میں متضاد ہیں (مضمون 49)۔

تو حاصل ہوا

$$\text{سیِ}\ (\text{-ص}) = \frac{\text{ھد'}}{\text{أد'}} = \frac{\text{-ھد}}{\text{أد}} = -\ \text{سیِ ص}$$

$$\text{ہسِ}\ (\text{-ص}) = \frac{\text{أھ}}{\text{أد'}} = \frac{\text{أھ}}{\text{أد}} = \text{ہسِ ص}$$

$$\text{مسِ}\ (\text{-ص}) = \frac{\text{ھد'}}{\text{أھ}} = \frac{\text{-ھد}}{\text{أھ}} = -\ \text{مسِ ص}$$

$$\text{قمسِ}\ (\text{-ص}) = \frac{\text{أھ}}{\text{ھد'}} = \frac{\text{أھ}}{\text{-ھد}} = -\ \text{قمسِ ص}$$

$$\text{قیسِ}\ (\text{-ص}) = \frac{\text{أد'}}{\text{ھد'}} = \frac{\text{أد}}{\text{-ھد}} = -\ \text{قسیِ ص}$$

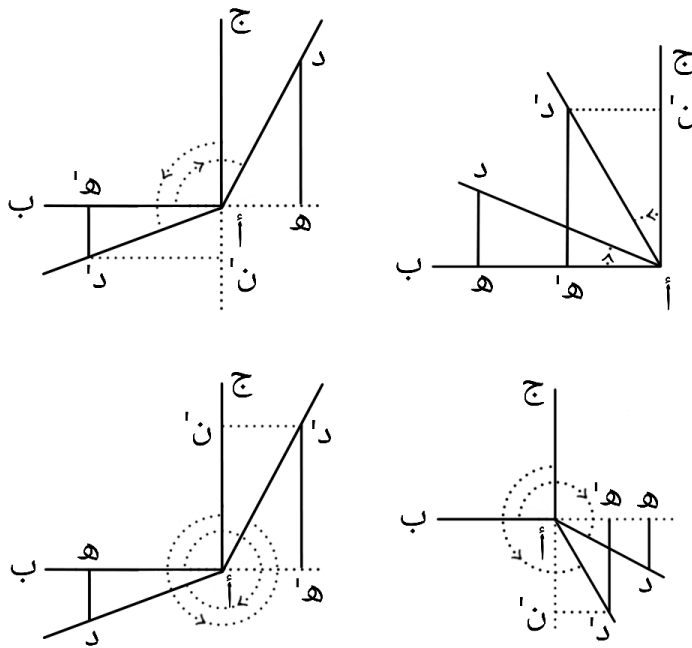
$$\text{قہسِ}\ (\text{-ص}) = \frac{\text{أد'}}{\text{أھ}} = \frac{\text{أد}}{\text{أھ}} = \text{قہسِ ص}\ .$$

امثلہ: $\text{سیِ}\ (-30°) = -\ \text{سیِ}\ 30° = -\frac{1}{2}$،

$\text{مسِ}\ (-60°) = -\ \text{مسِ}\ 60° = -\sqrt{3}$،

$\text{ہسِ}\ (-45°) = \text{ہسِ}\ 45° = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ۔

.69 زاویہ (°90 - ص) کے تناسبات تثلیثی کو ص کے تناسبات کے اعتبار سے معلوم کرنا، ص کی ہر قیمت کے لیے۔

قائمہ سے کم ص کی ہر قیمت کے لیے، نسبت مذکور کی بحث مضمون 39 میں گزر چکی ہے۔

فرض کرو کہ خط دورانی أب سے شروع ہوئی، و ایک زاویہ بأد گھومی جس کو ص سے تعبیر کیا گیا۔

اب زاویہ (°90 - ص) حاصل کرنے کے لیے خط دورانی کو ج تک گھماو، و پھر ج سے جہت ضدی میں زاویہ ص گھماو، پھر خط دورانی کے اس مقام کا نام أد' رکھو۔ تو زاویہ بأد' ہوا °90- ص ۔

و أد' کو أد کے متساوی کرو، و أب (یا أب سے نکلی ہوئی خط) پہ د'ھ' و دھ عمود بناو،

و أج (یا أج سے نکلی ہوئی خط) پہ د'ن' عمود بناو۔

و ہر رسمہ میں زوایا بأد و جأد' عددا، یعنی مقدار عددی میں، متساوی ہیں، و أن' و ھ'د' متوازی ہیں، لہذا ہر رسمہ میں ہوا

∠ھأد = ∠ن'أد' = ∠أد'ھ'

لہذا مثلث ھأد و ھ'د'أ ہر اعتبار سے متساوی ہوئے

لہذا أھ = ھ'د' عددا

و أھ' = ھد عددا

و ہر رسمہ میں أھ و ھ'د' کے رمز یکساں ہیں، و ایسے ہی ھد و أھ' ہیں،

یعنی أھ = +ھ'د' ، و أھ' = +ھد

لہذا حاصل ہوا

$$\text{سیر (90° - ص) = سیر بأد'} = \frac{\text{ھ'د'}}{\text{أد'}} = \frac{\text{أھ}}{\text{أد}} = \text{ہسہ ص}$$

$$\text{ہسہ (90° - ص) = ہسہ بأد'} = \frac{\text{أھ'}}{\text{أد'}} = \frac{\text{ھد}}{\text{أد}} = \text{سیر ص}$$

$$\text{مسہ (90° - ص) = مسہ بأد'} = \frac{\text{ھ'د'}}{\text{أھ'}} = \frac{\text{أھ}}{\text{ھد}} = \text{قمسہ ص}$$

$$\text{قمسہ (90° - ص) = قمسہ بأد'} = \frac{\text{أھ'}}{\text{ھ'د'}} = \frac{\text{ھد}}{\text{أھ}} = \text{مسہ ص}$$

$$\text{قہسہ (90° - ص) = قہسہ بأد'} = \frac{\text{أد'}}{\text{أھ'}} = \frac{\text{أد}}{\text{ھد}} = \text{قسیر ص}$$

$$\text{قسیر (90° - ص) = قسیر بأد'} = \frac{\text{أد'}}{\text{ھ'د'}} = \frac{\text{أد}}{\text{أھ}} = \text{قہسہ ص}$$

70. زاویہ (90° + ص) کے تناسبات تثلیثی کو ص کے تناسبات کے اعتبار سے معلوم کرنا، ص کی ہر قیمت کے لیے۔

فرض کرو کہ خط دورانی مقام أب سے شروع ہوئی، و کوئی زاویہ ص گھومی و تب خط دورانی کا مقام ہوا أد، تو زاویہ بأد ص ہوا۔

و فرض کرو کہ خط دورانی أد سے جہتِ ایجابی میں مقام أد' تک ایک قائمہ گھومی، تو زاویہ بأد' ہوا (90° + ص)۔

اب أد' کو أد کے برابر کرو، و بأب' پہ دھ و د'ھ' عمود بناو۔

چونکہ ہر رسمہ میں دأد' قائمہ ہے تو ھأد و د'أھ' کا جمع ہمیشہ قائمہ ہوگا۔

لہذا ∠ھأد = 90° - ∠د'أھ' = ∠أد'ھ'

تو دونوں مثلثات ھأد و ھ'د'أ ہر اعتبار سے متساوی ہوئے۔

لہذا أھ و ھ'د' عددا متساوی ہوئے، و ایسے ہی ھد و أھ' بھی عددا متساوی ہوئے۔

و ہر رسمہ میں أھ و ھ'د' کا رمز ایک ہی ہے، جبکہ ھد و أھ' کے مختلف ہیں، تو

ھ'د' = +أھ ، و أھ' = -ھد

تو حاصل ہوا

سیِ (90° + ص) = سیِ ب أد' = $\frac{\text{ھ'د'}}{\text{أد'}}$ = $\frac{\text{أھ}}{\text{أد}}$ = ہسِ ص

ہسِ (90° + ص) = ہسِ ب أد' = $\frac{\text{أھ'}}{\text{أد'}}$ = $\frac{\text{-ھد}}{\text{أد}}$ = - سیِ ص

مسِ (90° + ص) = مسِ ب أد' = $\frac{\text{ھ'د'}}{\text{أھ'}}$ = $\frac{\text{أھ}}{\text{-ھد}}$ = - قمسِ ص

قمسِ (90° + ص) = قمسِ ب أد' = $\frac{\text{أھ'}}{\text{ھ'د'}}$ = $\frac{\text{-ھد}}{\text{أھ}}$ = - مسِ ص

قہسِ (90° + ص) = قہسِ ب أد' = $\frac{\text{أد'}}{\text{أھ'}}$ = $\frac{\text{أد}}{\text{-ھد}}$ = - قسیِ ص

قسیِ (90° + ص) = قسیِ ب أد' = $\frac{\text{أد'}}{\text{ھ'د'}}$ = $\frac{\text{أد}}{\text{أھ}}$ = قہسِ ص

امثلہ: سیِ 150° = سیِ (90° + 60°) = ہسِ 60° = $\frac{1}{2}$ ۔

ہسِ 135° = ہسِ (90° + 45°) = - سیِ 45° = - $\frac{1}{\sqrt{2}}$ ۔

مسِ 120° = مسِ (90° + 30°) = - قمسِ 30° = - $\sqrt{3}$ ۔

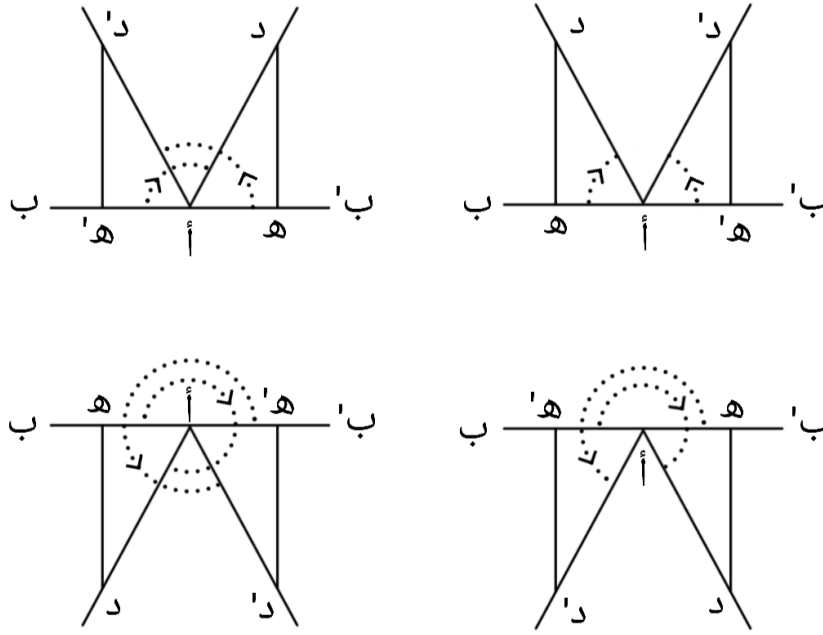
71. جب دو زوایا کا اجتماع دو قائمات کے متساوی ہو تو انہیں تکمیلی کہیں گے۔ تو کسی بھی زاویہ ص کا تکمیلی ہوا 180° - ص ۔

امثلہ: 30° کا تکمیلی = 180° - 30° = 150°

120° کا تکمیلی = 180° - 120° = 60°

275° کا تکمیلی = 180° - 275° = - 95°

- 126° کا تکمیلی = 180° - (- 126°) = 306° .

72. زاویہ (180° - ص) کے تناسبات تثلیثی کو ص کے تناسبات کے اعتبار سے حاصل کرنا، ص کی ہر قیمت کے لیے۔

فرض کرو کہ خط دورانی أب سے شروع ہوئی و کوئی زاویہ بأد (=ص) گھومی۔

تو زاویہ (180° - ص) کو حاصل کرنے کے لیے، خط دورانی کو أب سے شروع کرو، و دو قائمات گھمانے کے بعد (یعنی مقام أب' تک) واپس زاویہ ص گھماو مقام أد' تک، تاکہ زاویہ ب'أد' مقدار میں زاویہ بأد کے متساوی و رمز میں متضاد ہو جائے۔

تو زاویہ ب'أد' 180° - ص ہوا۔

پھر أد' کو أد کے متساوی کرو، و ب أب' پہ دو عمود ھ'د' و ھد بناو۔

چونکہ زوایا ھأد و ھ'أد' متساوی ہیں، لہذا مثلثات ھأد و ھ'أد' بھی ہر اعتبار سے متساوی ہوئے۔

لہذا أھ و أھ' مقدار میں متساوی ہوئے، تو ھد و ھ'د' بھی متساوی ہوئے۔

تو ہر رسمہ میں أھ و أھ' جہات متضاد میں بنے ہیں، جبکہ ھد و ھ'د' جہات متشابہ میں بنے ہیں۔

تو ہوا أھ' = -أھ، و ھ'د' = +ھد

لہذا حاصل ہوا

$$\text{سیر }(180° - \text{ص}) = \text{سیر ب'أد'} = \frac{\text{ھ'د'}}{\text{أد'}} = \frac{\text{ھد}}{\text{أد}} = \text{سیر ص}$$

$$\text{ہسر }(180° - \text{ص}) = \text{ہسر ب'أد'} = \frac{\text{أھ'}}{\text{أد'}} = \frac{\text{-أھ}}{\text{أد}} = -\text{ ہسر ص}$$

$$\text{مسر }(180° - \text{ص}) = \text{مسر ب'أد'} = \frac{\text{ھ'د'}}{\text{أھ'}} = \frac{\text{ھد}}{\text{-أھ}} = -\text{ مسر ص}$$

$$\text{قمسر }(180° - \text{ص}) = \text{قمسر ب'أد'} = \frac{\text{أھ'}}{\text{ھ'د'}} = \frac{\text{-أھ}}{\text{ھد}} = -\text{ قمسر ص}$$

$$\text{قہسر }(180° - \text{ص}) = \text{قہسر ب'أد'} = \frac{\text{أد'}}{\text{أھ'}} = \frac{\text{أد}}{\text{-أھ}} = -\text{ قہسر ص}$$

$$\text{قسیر }(180° - \text{ص}) = \text{قسیر ب'أد'} = \frac{\text{أد'}}{\text{ھ'د'}} = \frac{\text{أد}}{\text{ھد}} = \text{قسیر ص} .$$

امثلہ: $\text{سیر } 120° = \text{سیر }(180° - 60°) = \text{سیر } 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ۔

$\text{ہسر } 135° = \text{ہسر }(180° - 45°) = -\text{ ہسر } 45° = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ ۔

$\text{مسر } 150° = \text{مسر }(180° - 30°) = -\text{ مسر } 30° = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ ۔

73. زاویہ (180° + ص) کے تناسبات تثلیثی کو ص کے تناسبات کے اعتبار سے حاصل کرنا، ص کی ہر قیمت کے لیے۔

اس میں جو نسبتیں مطلوب ہیں وہ گزشتہ مضامین کے مثل ہندسہ سے حاصل کی سکتی ہیں۔ و اس مقدمہ کے رسمات بآسانی بنائے جا سکتے ہیں، لیکن طالب کی مشق کے لیے چھوڑ دیے گیے ہیں۔

و وہ مضمون 70 کے نتائج سے مستنبَط بھی کیے جا سکتے ہیں جو تمام زوایا کے لیے صادق ثابت ہو چکے ہیں۔

تو 90° + ص = ج فرض کر کے حاصل ہوا

سیِ (180° + ص) = سیِ (90° + ج) = ہسِ ج (مضمون 70)

= ہسِ (90° + ص) = **- سیِ ص** ، (مضمون 70)

ہسِ (180° + ص) = ہسِ (90° + ج) = - سیِ ج (مضمون 70)

= - سیِ (90° + ص) = **- ہسِ ص** ، (مضمون 70)

تو مسِ (180° + ص) = مسِ (90° + ج) = - قمسِ ج

= - قمسِ (90° + ص) = مسِ ص ،

و ایسے ہی قمسِ (180° + ص) = قمسِ ص ،

قہسِ (180° + ص) = - قہسِ ص ،

قسیِ (180° + ص) = - قسیِ ص ۔

74. زاویہ (360° + ص) کے تناسبات تثلیثی کو ص کے تناسبات کے اعتبار سے حاصل کرنا، ص کی ہر قیمت کے لیے۔

خط دورانی زاویہ ص گھومنے کے بعد چاہے جس مقام پہ ہو، جہت ایجابی میں ایک کامل دوران کرنے کے بعد وہ اسی مقام پہ ہوگی، یعنی وہاں جہاں وہ 360° + ص گھوم کے پہنچی۔

لہذا زاویہ 360° + ص کے تناسبات تثلیثی وہی ہوں گے جو ص کے ہیں۔

اس سے لازم ہے کہ 360° یا 360° کے کسی حاصل ضربی[17] کو کسی زاویہ میں جمع یا اس سے تفریق کرنے سے اس کے تناسبات تثلیثی میں کوئی تغیر نہیں ہوگا۔

75. اس باب کے مکتسبات سے معلوم ہوا کہ کسی بھی زاویہ کے تناسبات تثلیثی کو، چاہے وہ زاویہ جو ہو، ایک ایسے زوایہ کے تناسبات سے تعبیر کیا جا سکتا ہے جو 0° و 45° کے درمیان واقع ہو۔

امثلہ:

سیہ 1765° = سیہ [4×360° + 325°] = سیہ 325° (مضمون 74)

= سیہ (180° + 145°) = - سیہ 145° (مضمون 73)

= - سیہ (180° + 35°) = - سیہ 35° (مضمون 72)

مسہ 1190° = مسہ (3×360° + 110°) = مسہ 110° (مضمون 74)

= مسہ (90° + 20°) = - قسمہ 20° (مضمون 70)

و قسیہ (- 1465°) = - قسیہ 1465° (مضمون 68)

= - قسیہ (4×360° + 25°) = - قسیہ 25° (مضمون 74)

[17] جب ایک عدد میں دوسرے عدد کو ضرب دے کے تیسرا عدد حاصل کیا جائے، تو تیسرا پہلے دونوں میں سے ہر ایک کا حاصل ضربی ہے، جبکہ وہ دونوں تیسرے کے اجزء ضربی ہیں۔ مثال ب × ج = ض میں ب و ج میں سے ہر ایک ض کا جز ضربی ہے، جبکہ ض دونوں میں سے ہر ایک کا حاصل ضربی ہے۔

و کسی دوسرے بڑے زاویہ کے لیے بھی ایسے ہی کریں گے۔

اولا 360° کے حواصل ضربی کو کم کرو یہاں تک کہ زاویہ 0° و 360° کے درمیان آ جائے، پھر اگر 180° سے زیادہ ہو تو اس میں سے 180° زائل کرو، پھر اگر 90° سے زیادہ ہو تو مضمون 70 کا فارمولہ استعمال کرو، و بالآخر اگر ضرورت ہو تو مضمون 69 کا فارمولہ جاری کرو۔

76. مضمون 40 کی جدول میں اب قائمہ سے بڑے بعض اہم زوایا کو شامل کیا جا سکتا ہے۔

زوایا	°0	°30	°45	°60	°90	°120	°135	°150	°180
سی	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
ہس	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	1-
مس	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	∞	$-\sqrt{3}$	1 -	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0
قمس	∞	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	1 -	$-\sqrt{3}$	∞
قسی	∞	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	1	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{2}$	2	∞
قہس	1	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{2}$	2	∞	2 -	$-\sqrt{2}$	$-\frac{2}{\sqrt{3}}$	1-

باب 6

ان تمام زوایا کی عباراتِ عام جن کا ایک معلوم تناسب تثلیثی ہو۔

77. وہ سب سے چھوٹا زاویۂ ایجابی بنانا جس کا سائن ع کے متساوی ہو، جبکہ ع ایک کسرِ سالم[18] ہو۔

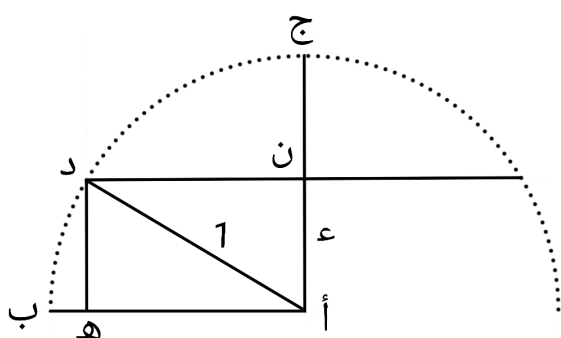
فرض کرو کہ أب ایک ابتدائی خط ہے و أج جہت ایجابی میں أب پہ عمود ہے۔

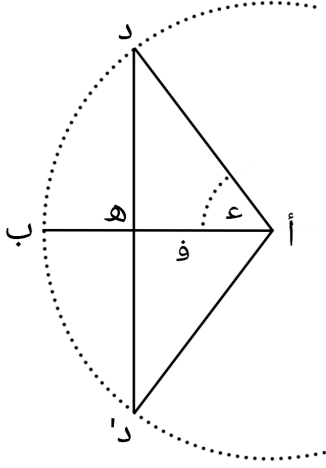
اب خط أج پہ ایک مسافت أن ناپو جو متساوی ہو طول کی ع ایکائیات کے۔ [اگر ع سلبی ہوتا تو نقطہ ن جأ سے نکلی ہوئی خط پہ واقع ہوتا۔] ن سے ند بناو متوازی أب کے۔ پھر مرکز أ و طول کی ایکائی کے متساوی نصف قطر سے ایک دائرہ بناو جسے ند سے نقطہ د پہ ملاو۔

تو بأد زوایۂ مطلوب ہوا۔

پھر ھد کو بأ پہ عمود بناو تاکہ

$$\text{سیٔ بأد} = \frac{\text{ھد}}{\text{أد}} = \frac{\text{أن}}{\text{أد}} = \frac{\text{ع}}{1} = \text{ع}$$

تو سائن بأد مقدار معلوم کے متساوی ہوا، لہذا بأد زاویۂ مطلوب ہے۔

[18] **کسر سالم** سے میری مراد وہ کسر ہے جس کا مافوق ماتحت سے چھوٹا ہو جیسے 4\10، و جو ایسا نہ ہو وہ **کسر فاسد** ہے جیسے 4\3 و 4\4 .

78. وہ سب سے چھوٹا زاویۂ ایجابی بنانا جس کا ہمسائن فہ کے متساوی ہو، جبکہ فہ ایک کسر سالم ہو۔

خط ابتدائی پہ ایک مسافت أھ ناپو جو متساوی ہو فہ کے، و ھد عمود بناو أب پہ۔

[اگر فہ سلبی ہوتا تو نقطہ ھ أ کے دوسرے جانب بأ سے نکلی ہوئی خط میں ہوتا۔]

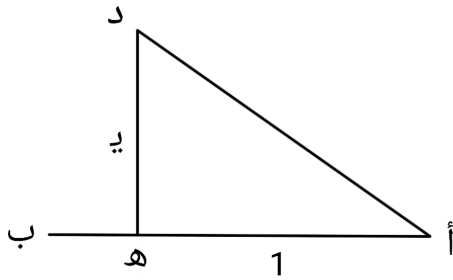
اب مرکز أ و اکائی کے متساوی نصف قطر سے ایک دائرہ بناو جسے خط ھد میں د پہ ملاو۔

تو بأد زاویۂ مطلوب ہوا کیونکہ

$$\text{ہس بأد} = \frac{\text{أھ}}{\text{أد}} = \frac{\text{فہ}}{1} = \text{فہ}$$

79. وہ سب سے چھوٹا زاویۂ ایجابی بنانا جس کا مماس یہ کے متساوی ہو۔

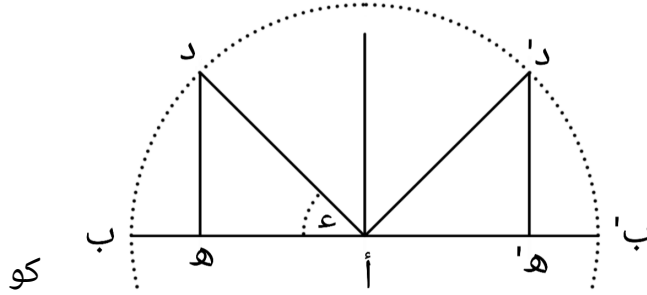
خط ابتدائی پہ أھ ایک اکائی کے مثل أھ ناپو، و اس پہ عمود ھد کھڑا کرو جو متساوی ہو یہ کے۔

تو

$$\text{مس بأد} = \frac{\text{ھد}}{\text{أھ}} = \text{یہ}$$

تو بأد زاویۂ مطلوب ہوا۔

80. مضمون 50 میں وارد تعریف سے واضح ہے کہ جب ایک زاویہ معلوم ہوگا تو اس کا سائن بھی معلوم ہوگا۔ لیکن اس کے برعکس نہیں ہے، کیونکہ ایک معلوم سائن ایک سے زیادہ زوایا کے لیے ہوتا ہے، مثلا زوایا 30°، 150°، 390°، -210°،... سب کے سائن متساوی ہیں $\frac{1}{2}$ کے۔
لہذا ایک زاویہ کا سائن معلوم ہونے سے ہم اس معین زاویہ کو معلوم نہیں کر سکتے، و جو کچھ ہمیں معلوم ہوتا ہے وہ یہ ہے کہ وہ زاویہ زوایا کی ایک بڑی تعداد میں سے ہے۔
و ایسے ہی ہوگا اگر زاویہ کا ہمسائن، مماس یا کوئی دوسرا دالۂ تثلیثی معلوم ہو۔
لہذا کسی زاویہ کے کسی ایک دالۂ تثلیثی کے معلوم ہونے سے وہ زاویہ بلا ابہام کے معلوم نہیں ہو سکتا۔

81. فرض کرو کہ ہمیں معلوم ہے کہ خط دورانی أد منطبق ہوئی خط ابتدائی أب پہ، تو جو کچھ ہمیں معلوم ہے وہ یہ ہے کہ خط دورانی نے 0 یا 1 یا 2 یا 3 یا... کامل دوران کیے، یا تو ایجابی یا سلبی۔
لیکن جب خط دورانی نے ایک دوران مکمل کیا تو جو زاویہ وہ گھومی وہ 2π قطریات کے متساوی ہوا (مضمون 17)۔
لہذا جب خط دورانی أد خط ابتدائی أب پہ منطبق ہوئی تو زاویہ جو اس نے بنایا وہ 0 یا 1 یا 2 یا 3 یا... مرتبہ 2π قطریات ایجابی یا سلبی جہات میں ہوا،
یعنی 0 یا $\pm 2\pi$ یا $\pm 4\pi$ یا $\pm 6\pi$ یا... قطریات۔
و اسے اس قول سے تعبیر کیا جاتا ہے کہ جب خط دورانی خط ابتدائی پہ منطبق ہوگی تو **2طπ** بنائے گی، و ط کوئی ایجابی یا سلبی عدد صحیح ہے۔

82. **مکتسب:** ان تمام زوایا کو شامل کرنے والی ایک عبارت عام معلوم کرنا جن کے سائن یکساں ہو۔

فرض کرو کہ بأد معلوم سائن والا سب سے چھوٹا زاویۂ ایجابی ہے، و اسے ء سے تعبیر کرو۔

و خط أب پہ عمود دھ بناو، و ھأ کو ھ' تک نکالو، اس طور پہ کہ ھأ متساوی ہو أھ' کے، و ھد کے متساوی و متوازی ھ'د' بناو۔

تو مضمون 72 کے مثل، زاویہ بأد' متساوی ہوا π-ء کے۔

تو جب خط دورانی مقام أد یا أد' میں گئی، نہ کہ ان کے غیر میں، تو جو زاویہ بنا اس کا سائن متساوی ہے سائن معلوم کے۔

و جب خط دورانی مقام أد میں گئی تو اس نے ایک عددِ تام مرتبہ کامل دوران کیا، و پھر ایک زاویہ ء بنایا، یعنی گزشتہ مضمون کے مطابق ایک زاویہ بنایا متساوئ

2شπ + ء ....(1)

جبکہ ش صفر یا کوئی صحیح ایجابی یا سلبی ہے۔

و ایسے ہی جب خط دورانی مقام أد' میں گئی، تو ایک زاویہ 2شπ+بأد' بنایا، یعنی زاویہ 2شπ+π-ء ، یعنی

(2ش+1)π-ء ....(2)

جبکہ ش صفر یا کوئی صحیح ایجابی یا سلبی ہے۔

یہ تمام زوایا عبارتِ درج ذیل میں شامل ہیں۔

ط π+(-1)^{ط}ع ....(3)

جبکہ ط صفر یا کوئی صحیح ایجابی یا سلبی ہے۔

چونکہ جب ط = 2ش ، و چونکہ (-1)^{2ش} = +1، تو عبارت (3) ہوئی 2شπ+ع ، جو عبارت (1) کے متساوی۔

و جب ط=2ش+1 ، و چونکہ (-1)$^{2ش+1}$ = -1، تو عبارت (3) ہوئی (2ش+1)π-ع ، جو متساوی ہے عبارت (2) کے۔

لازم: چونکہ تمام زوایا جن کے سائن متشابہ ہیں تو ان کے قلب سائن بھی متشابہ ہوئے، لہذا عبارت (3) ان تمام زوایا کو شامل ہوگی جن کے قلب سائن متشابہ ہیں ع کے۔

83. **مکتسب:** ان تمام زوایا کو شامل کرنے والی ایک عبارتِ عام معلوم کرنا جن کے ہمسائن یکساں ہو۔

فرض کرو کہ بأد معلوم ہمسائن والا سب سے چھوٹا زاویہ ہے، و اسے ع سے تعبیر کرو۔

و أب پہ عمود دھ قائم کرو و اسے د' تک نکالو، ھد' کو دھ کے متساوی رکھتے ہوئے۔

جب خط دورانی مقام أد یا أد' میں ہو، و ان کے غیر میں نہ ہو، تو جیسا کہ مضمون 78 میں ہے کہ جو زاویہ بنا اس کا ہمسائن متساوی ہوگا اس ہمسائن کے جو معلوم ہے۔

و جب خط دورانی مقام أد میں گئی، تو اس نے ایک عدد تام مرتبہ کامل دوران کیا ہے پھر زاویہ ء بنایا ہے، یعنی اس نے کل زاویہ 2طπ+ء بنایا ہے، جبکہ ط صفر یا کوئی صحیح ایجابی یا سلبی ہے۔

و جب خط دورانی مقام أد' میں ہو، تو اس نے ایک عدد طبیعت مرتبہ کامل دوران کیا ہے پھر زاویہ -ء بنایا ہے، یعنی اس نے کل زاویہ 2طπ-ء بنایا ہے، جبکہ ط صفر یا کوئی صحیح ایجابی یا سلبی ہو۔

یہ تمام زوایا اس عبارت میں شامل ہیں

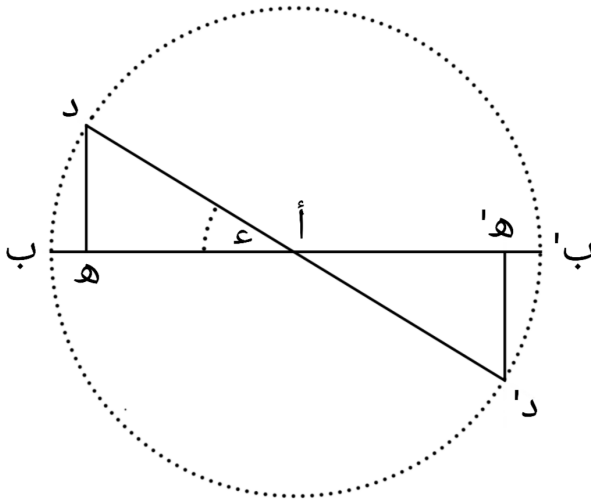
2طπ±ء ....(1)

لازم: عبارت (1) میں وہ تمام زوایا شامل ہیں جن کا قلب ہمسائن ء کے متساوی ہو۔

84. **مکتسب:** ان تمام زوایا کو شامل کرنے والی ایک عبارت عام معلوم کرنا جن کے مماس یکساں ہوں۔

فرض کرو کہ ب‌أد معلوم مماس والا سب سے چھوٹا زاویہ ہے، و اسے ء سے تعبیر کرو۔

و دأ کو د' تک نکالو، أد' کو أد کے متساوی رکھتے ہوئے، و د'ھ' کو عمود بناو أھ' پہ۔

تو مضمون 73 کے مثل، زوایا ب‌أد و ب‌أد' کے مماس یکساں ہوئے، و زاویہ ب‌أد'=π+ء ۔

جب خط دورانی مقام أد میں گئی، تو اس نے ایک عددِ تام مرتبہ کامل دوران کیا ہے،
پھر زاویہ ء گھومی ہے، یعنی اس نے بنایا

2شπ+ء .... (1)

جبکہ ش صفر یا کوئی عدد صحیح ایجابی یا سلبی ہو۔

و ایسے ہی جب خط دورانی مقام أد' میں گئی، تو اس نے ایک زاویہ 2شπ+(π+ء) بنایا ہے، یعنی

(2ش+1)π+ء ....(2)

یہ تمام زوایا اس عبارت میں شامل ہیں

طπ+ء ....(3)

تو جب ط جفت ہوگا، (= 2ش بول لو)، تو عبارت (3) عبارت (1) جیسے زوایا دے گی۔

و جب ط تاق ہوگا، (= 2ش+1 بول لو)، تو عبارت (3) عبارت (2) جیسے زوایا دے گی۔

لازم: عبارت (3) میں وہ تمام زوایا شامل ہیں جن کا قلب مماس ء کے متساوی ہو۔

85. **مثال 1:** ان تمام زوایا کو شامل کرنے والی عبارت عام لکھو،

(1) جن کا سائن $\frac{\sqrt{3}}{2}$ کے متساوی ہو۔

(2) جن کا ہمسائن - $\frac{1}{2}$ کے متساوی ہو۔

(3) جن کا مماس $\frac{1}{\sqrt{3}}$ کے متساوی ہو۔

(1) وہ سب سے چھوٹا زاویہ جس کا سائن $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ہے، °60 ہے، یعنی $\frac{\pi}{3}$ ۔

لہذا مضمون 82 کے مطابق، ان تمام زوایا کی عبارت عام، جن کا یہ سائن ہے، ہوئی

$$\text{ط}\pi + (-1)^{\text{ط}} \frac{\pi}{3}$$

(2) وہ سب سے چھوٹا زاویہ ایجابی جس کا ہمسائن ہے - $\frac{1}{2}$ ، وہ ہے 120°، یعنی $\frac{\pi2}{3}$ ۔

لہذا مضمون 83 کے مطابق، اس ہمسائن والے تمام زوایا کو شامل کرنے والی عبارت

عام ہوئی $2ط\pi \pm \frac{\pi2}{3}$

(3) وہ سب سے چھوٹا زاویہ ایجابی جس کا مماس ہے $\frac{1}{\sqrt{3}}$ ، وہ ہے 30°، یعنی $\frac{\pi}{6}$ ۔

لہذا مضمون 84 کے مطابق، اس مماس والے تمام زوایا کو شامل کرنے والی عبارت عام

ہوئی $ط\pi \pm \frac{\pi}{6}$

مثال 2: ص کی وہ سب سے عام قیمت کیا ہے جو مساوات سی^{2}ص = $\frac{1}{4}$ کو تمام کرے؟

یہاں ہمیں معلوم ہے کہ سیص = ± $\frac{1}{2}$ ۔

تو رمز ایجابی کے اعتبار سے

$$\text{سیص} = \frac{1}{2} = \text{سی}\left(\frac{\pi}{6}\right)$$

$$\therefore \text{ص} = ط\pi + (-1)^{ط} \frac{\pi}{6}$$

و رمز سلبی کے اعتبار سے

$$\text{سیص} = -\frac{1}{2} = \text{سی}\left(-\frac{\pi}{6}\right)$$

$$\therefore \text{ص} = ط\pi + (-1)^{ط} - \frac{\pi}{6}$$

دونوں نتائج کو ایک وضع کر کے حاصل ہوا

$$\therefore ص = ط\pi \pm (-1)^{ط} \frac{\pi}{6}$$

یا

$$ص = ط\pi \pm \frac{\pi}{6}$$

مثال 3: ص کی وہ سب سے عام قیمت کیا ہوگی جو مساوات سیص = - $\frac{1}{2}$ و مسص = $\frac{1}{\sqrt{3}}$ دونوں کو تمام کرے؟

0° و 360° کے درمیان کے زوایا میں سے، خالص 210° و 330° وہ زوایا ہیں جن کاسائن - $\frac{1}{2}$ ہے، و ایسے ہی خالص 30° و 210° وہ زوایا ہیں جن کا مماس $\frac{1}{\sqrt{3}}$ ہے۔

لہذا 0° و 360° کے درمیان خالص 210°، یعنی $\frac{7\pi}{6}$، وہ زاویہ ہے جو دونوں شرائط کو تمام کر رہا ہے۔

لہذا اب اس زاویہ میں چار قائمات کا کوئی بھی حاصل ضربی جمع کر کے اس کی سب سے عام قیمت حاصل ہو جائے گی، تو وہ ہوئی

$$2ط\pi + \frac{7\pi}{6}$$

جبکہ ط ایک عدد صحیح ایجابی یا سلبی ہے۔

86. وہ مساوات جس میں کسی زاویۂ مجہول کے تناسب تثلثی شامل ہو تو **مساوات تثلیثی** ہے۔

و وہ مساوات تب تک حل نہ ہو پائے گی جب تک کہ ہم اس کو تمام کرنے والے سارے زوایا کو شامل کرنے والی ایک عبارت نہیں کر لیتے۔

آیندہ مضامین میں کچھ بنایدی قسم کی مساوات حل کی گئی ہیں۔

87. **مثال 1:** مساوات 2سی^{2}ح + $\sqrt{3}$ہسح + 1 = 0۔

اس عبارت کو ایسے بھی سمجھا جا سکتا ہے کہ

2 - 2ہس^{2}ح + $\sqrt{3}$ہسح + 1 = 0،

یعنی 2ہس^{2}ح - $\sqrt{3}$ہسح - 3 = 0،

یعنی (ہسح - $\sqrt{3}$)(2ہسح + $\sqrt{3}$) = 0۔

تو عبارت ہسح = $\sqrt{3}$، یا ہسح = - $\frac{\sqrt{3}}{2}$ سے تمام ہوگی۔

پھر ایسا کوئی زاویہ ہے نہیں جس کا ہمسائن $\sqrt{3}$ ہو، لہذا پہلا جواب حل ہو نہیں سکتا۔

و سب سے چھوٹا زاویہ ایجابی جس کا ہمسائن - $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ہے، وہ ہے 150°، یعنی $\frac{5\pi}{6}$ ۔

لہذا اس زاویہ کی سب سے عام قیمت جس کا ہمسائن - $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ہو، ہوئی

2طπ ± $\frac{5\pi}{6}$ (مضمون 83)

یہ مساواتِ معلوم کا حلِّ عام ہے۔

مثال 2: مساوات مس5ص = قمس2ص حل کرو۔

عبارت کو ایسے بھی لکھا جا سکتا ہے کہ

$$\text{مس } 5\text{ص} = \text{مس}\left(\frac{\pi}{6} - 2\text{ص}\right)$$

اب اس زاویہ کی سب سے عام قیمت، جس کا مماس $\frac{\pi}{2} - 2\text{ص}$ کے مثل ہو، ہوئی $\text{ط}\pi + \frac{\pi}{2} - 2\text{ص}$، مطابق مضمون 84 کے۔

جبکہ ط کوئی بھی عدد صحیح ایجابی یا سلبی ہو۔

لہذا اس مساوات کا سب سے عام حل ہوگا

$$5\text{ص} = \text{ط}\pi + \frac{\pi}{2} - 2\text{ص}$$

$$\therefore \text{ص} = \frac{1}{7}\left(\text{ط}\pi + \frac{\pi}{2}\right)$$

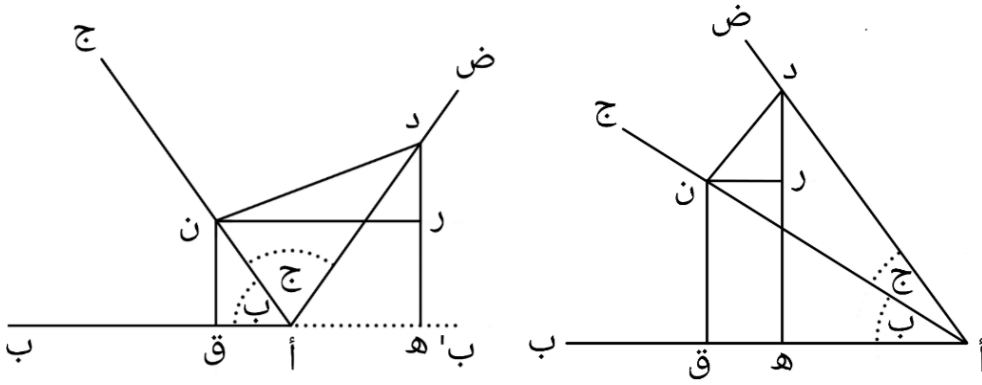
جبکہ ط کوئی عدد صحیح ہو۔

باب 7

دو زوایا کے اجتماع و فرق کے تناسبات تثلیثی۔

88. **مکتسب:** دلیل کہ

سیِ (ب+ج) = سیِ ب ہسِ ج + ہسِ ب سیِ ج،

و ہسِ (ب+ج) = ہسِ ب ہسِ ج − سیِ ب سیِ ج۔

فرض کرو کہ خط دورانی أب سے شروع ہوئی و ایک زاویہ بأج (=ب) بنایا، پھر مزید ایک زاویہ جأض (=ج) بنایا۔

تو خط دورانی کے آخری مقام أض میں کوئی نقطہ د لو، و اس سے عمود دھ و دن بناو خطوط أب و أج پہ حسب ترتیب؛ پھر ن سے نر بناو متوازی بأ کے، جسے ھد میں نقطہ ر سے ملاو، و عمود نق بناو أب پہ۔

تو زاویہ ردن = 90° − ∠دنر = ∠رنأ = ∠نأق = ب.

لہذا سیہ (ب+ج) = سیہ بأد = $\frac{\text{هد}}{\text{أد}} = \frac{\text{هر+رد}}{\text{أد}}$

$= \frac{\text{قن}}{\text{أد}} + \frac{\text{رد}}{\text{أد}} = \frac{\text{قن}}{\text{أن}}\ \frac{\text{أن}}{\text{أد}} + \frac{\text{رد}}{\text{ند}}\ \frac{\text{ند}}{\text{أد}}$

= سیہ ب ہسہ ج + ہسہ ردن سیہ ج.

∴ سیہ (ب+ج) = سیہ ب ہسہ ج + ہسہ ب سیہ ج.

پھر ہسہ (ب+ج) = ہسہ بأد = $\frac{\text{أه}}{\text{أد}} = \frac{\text{أق − هق}}{\text{أد}}$

$= \frac{\text{أق}}{\text{أد}} - \frac{\text{رن}}{\text{أد}} = \frac{\text{أق}}{\text{أن}}\ \frac{\text{أن}}{\text{أد}} - \frac{\text{رن}}{\text{ند}}\ \frac{\text{ند}}{\text{أد}}$

= ہسہ ب ہسہ ج − سیہ ردن سیہ ج.

∴ ہسہ (ب+ج) = ہسہ ب ہسہ ج − سیہ ب سیہ ج.

89. گزشتہ مضمون میں رسمات خالص ان مسائل کے لیے بنائے گئے ہیں جن میں ب و ج حادات ہوں۔ لیکن اس میں بیان کردہ دلیل کسی بھی سائز کے زاویہ پہ جاری ہوگی، و تب اس میں شامل مقادیر کے رموز پہ توجہ دینا لازم ہوگا۔

لہذا مزید کوئی رسمہ بنائے بغیر ہی ثابت کیا جا سکتا ہے کہ یہ نتائج تمام زوایا کے لیے صادق ہیں، جیسا کہ آگے مذکور ہے۔

فرض کرو کہ ب و ج حادات ہیں، تو مضمون 88 سے معلوم ہوا کہ یہ مکتسب ب و ج کے لیے صادق ہے۔

فرض کرو کہ $ب_1 = 90° + ب$، تو مضمون 70 سے حاصل ہوا

سیہ $ب_1$ = ہسہ ب، و ہسہ $ب_1$ = – سیہ ب۔

تو سیہ $(ب_1+ج)$ = سیہ {90°+(ب+ج)} = ہسہ (ب+ج)، مضمون 70 سے،

= ہسہ ب ہسہ ج – سیہ ب سیہ ج = سیہ $ب_1$ ہسہ ج + ہسہ $ب_1$ سیہ ج۔

ایسے ہی ہسہ $(ب_1+ج)$ = ہسہ [90°+(ب+ج)] = – سیہ (ب+ج)

= – سیہ ب ہسہ ج – ہسہ ب سیہ ج = ہسہ $ب_1$ ہسہ ج – سیہ $ب_1$ سیہ ج۔

و ایسے ہی کریں گے اگر ج 90° زیادہ ہو جائے۔

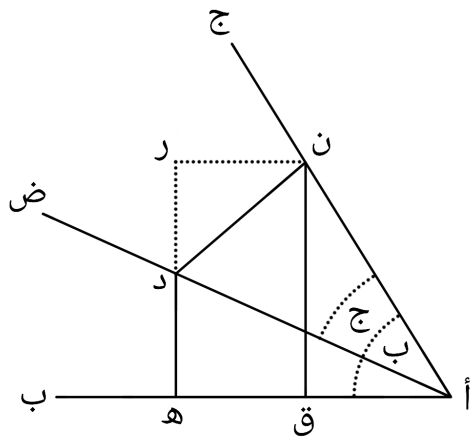
تو مضمون 88 کے فارمولات صادق ہوں گے اگر ب یا ج میں سے کوئی 90° بڑھتا ہے، یعنی اگر ان میں شامل زوایا 0° و 180° کے درمیان ہوں۔

و ایسے ہی جب ایک یا دونوں زوایا کی قمیت 0° و 270° کے درمیان ہو تو ہم $ب_2 = 90° + ب_1$ فرض کر کے ان مکتسبات کے صدق کو ثابت کر سکتے ہیں۔

اسی طرح آگے بڑھنے پہ ہم دیکھیں گے کہ یہ مکتسبات کلیا صادق ہیں یعنی ہمیشہ صادق ہوں گے۔

90. **مکتسب:** دلیل کہ

سیہ(ب – ج) = سیہب ہسہج – ہسہب سیہج،

و ہسہ(ب – ج) = ہسہب ہسہج + سیہب سیہج۔

فرض کرو کہ خط دورانی خط ابتدائی أب سے شروع ہوئی و زاویہ بأج(=ب) بنایا، و پھر جہت خلاف میں گھومی و زاویہ جأض بنایا جس کی مقدار ہے ج، تو زاویہ بأض ہوا ب – ج۔

خط دورانی کے آخری مقام میں کسی نقطہ د سے دھ و دن عمود بنایا أب و أج پہ حسب ترتیب؛ پھر ن سے نق و نر عمود بنایا أب و ھد پہ حسب ترتیب۔

تو زاویہ ردن = 90° – ∠دنر = ∠درنج = ∠قأن = ب،

لہذا سیہ (ب-ج) = سیہ بأد = $\frac{\text{ھد}}{\text{أد}} = \frac{\text{ھد-در}}{\text{أد}}$

$= \frac{\text{قن}}{\text{أد}} - \frac{\text{رد}}{\text{أد}} = \frac{\text{قن}}{\text{أن}}\ \frac{\text{أن}}{\text{أد}} - \frac{\text{رد}}{\text{ند}}\ \frac{\text{ند}}{\text{أد}}$،

= سیہ ب ہسہ ج – ہسہ ردن سیہ ب،

لہذا **سیہ (ب – ج) = سیہ ب ہسہ ج – ہسہ ب ہسہ ج۔**

و ہسہ (ب–ج) = $\frac{\text{أھ}}{\text{أد}} = \frac{\text{أق + قھ}}{\text{أد}}$

$= \frac{\text{أق}}{\text{أد}} + \frac{\text{نر}}{\text{أد}} = \frac{\text{أق}}{\text{أن}}\ \frac{\text{أن}}{\text{أد}} + \frac{\text{نر}}{\text{ند}}\ \frac{\text{ند}}{\text{أد}}$

= ہسہ ب ہسہ ج + سیہ ندر سیہ ج،

لہذا **ہسہ (ب – ج) = ہسہ ب ہسہ ج + سیہ ب سیہ ج۔**

91. گزشتہ مضمون میں بیان کردہ دلائل کسی بھی سائز کے زوایا پہ جاری ہو سکتے ہیں اگر مقادیر متضمنہ کے لیے رموز کو ملحوظ رکھا جائے۔

حادات کے لیے ان فارمولات کو صادق تسلیم کر کے ہم مزید کوئی رسمہ بنائے بنا یہ دکھا سکتے ہیں کہ وہ تمام زوایا کے لیے صادق ہیں۔

فرض کرو $ب_1$ = 90° + ب، تو حاصل ہوا

(چونکہ سیہ $ب_1$ = ہسہ ب، و ہسہ $ب_1$ = – سیہ ب)،

سیہ($ب_1$ – ج) = سیہ [90° + (ب – ج)] = ہسہ(ب – ج) (مضموں 70)

= ہسہ ب ہسہ ج + سیہ ب سیہ ج

= سیہ $ب_1$ ہسہ ج – ہسہ $ب_1$ سیہ ب ۔

و ہسہ ($ب_1$ – ج) = ہسہ [90° + (ب – ج)] = – سیہ (ب – ج)   (مضموں 70)

= – سیہ ب ہسہ ج + ہسہ ب سیہ ب

= – ہسہ $ب_1$ ہسہ ج + سیہ $ب_1$ سیہ ج ۔

و اگر ب 90° سے زیادہ ہو تب بھی ہم ایسے ہی کریں گے۔

لہذا یہ مکتسب ان تمام زوایا کے لیے صادق ہوا جو دو قائمات سے بڑے نہ ہوں۔

تو اب $ب_2$ = 90°+$ب_1$ فرض کر کے ہم دکھا سکتے ہیں کہ یہ مکتسب تین قائمات سے کم تمام زوایا کے لیے صادق ہے، و ایسے ہی آگے بھی۔

تو اس طرح ہم نے یہ ثابت کر دیا کہ یہ مکتسب تمام زوایا کے لیے صادق ہے چاہے وہ جو ہوں۔

92. مضامین 88 و 90 کے مکتسبات جو زوایا کے دالات کے اعتبار سے دو زوایا کے جمع و تفریق کے دلالت تثلیثی کو بیان کرتے ہیں، وہ **مکتسباتِ جمع و تفریق** کہلاتے ہیں۔

93. **مثال 1:** سیہ 75° و ہسہ 75° کی قیم بتاو۔

سیہ 75° = سیہ (45°+30°) = سیہ 45° ہسہ 30° + ہسہ 45° سیہ 30°

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{2} = \frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{2}\,2}$$

و ہس 75° = ہس (45°+30°) = ہس 45° ہس 30° – سیِ 45° سیِ 30°

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$$

مثال 2: سیِ(ح+س) و ہس(ح+س) کے فارمولات کو تسلیم کر کے اس سے سیِ(ح-س) و ہس(ح-س) کے فارمولات مستنبط کرو۔

ہمیں معلوم ہے کہ

سیِح = سیِ{(ح-س)+س} = سیِ(ح-س) ہسس + ہس(ح-س) سیِس ....(1)

و ہسح = ہس{(ح-س)+س} = ہس(ح-س) ہسس + سیِ(ح-س) سیِس ....(2)

ہس س کو (1) میں و سیِ س کو (2) میں ضرب دیا، پھر تفریق کیا تو ہوا

سیِح ہسس - ہسح سیِس = سیِ(ح-س) {ہس^{2}س + سیِ^{2}س} = سیِ(ح-س)

سیِ س کو (1) میں و ہس س کو (2) میں ضرب دیا، پھر جمع کیا تو ہوا

سیِح سیِس + ہسح ہسس = ہس(ح-س) {ہس^{2}س + سیِ^{2}س} = ہس(ح-س)

لہذا دونوں فارمولات مطلوب ثابت ہوئے۔

یہ دو فارمولات زوایا کی تمام قیم لیے صادق ہوں گے کیونکہ جن فارمولات سے یہ مستنبط ہیں وہ تمام قیم کے لیے صادق ہیں۔

94. مضامین 88 و 90 سے ب و ج کی تمام قیم کے لیے ہمیں معلوم ہوا کہ

سیِ (ب+ج) = سیِب ہسج + ہسب سیِج،

و سیِ (ب – ج) = سیِب ہسج – ہسج سیِب

لہذا جمع و تفریق سے حاصل ہوا

سیہ (ب+ج) + سیہ (ب – ج) = 2سیب ہسج ....(1)

و سیہ (ب+ج) – سیہ (ب – ج) = 2ہسب سیج ....(2)

انہیں مضامین سے ب و ج کی تمام قیم کے لیے یہ بھی معلوم ہوا کہ

ہسہ (ب+ج) = ہسب ہسج – سیب سیج،

و ہسہ (ب – ج) = ہسب ہسج + سیب سیب۔

لہذا جمع و تفریق سے معلوم ہوا کہ

ہسہ (ب+ج) + ہسہ (ب – ج) = 2ہسب ہسج ....(3)

و ہسہ (ب – ج) – ہسہ (ب+ج) = 2سیب سیج ....(4)

اب فرض کرو ب+ج = ض و ب-ج = غ، تو ہوا

ب = $\frac{\text{ض+غ}}{2}$ ، و ج = $\frac{\text{ض-غ}}{2}$ ۔

یہ تبدیلات کرنے سے ض و غ کی تمام قیم کے لیے (1) سے (4) تک کی نسبتیں ہوئیں۔

سیض + سیغ = 2 سیہ $\frac{\text{ض+غ}}{2}$ ہسہ $\frac{\text{ض−غ}}{2}$ ....(ع1)

سیض – سیغ = 2 ہسہ $\frac{\text{ض+غ}}{2}$ سیہ $\frac{\text{ض−غ}}{2}$ ....(ع2)

ہسض + ہسغ = 2 ہسہ $\frac{\text{ض+غ}}{2}$ ہسہ $\frac{\text{ض−غ}}{2}$ ....(ع3)

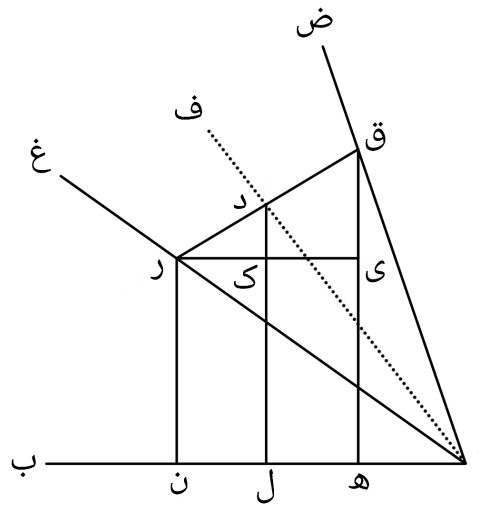
ہسغ – ہسض = 2 سیہ $\frac{\text{ض+غ}}{2}$ سیہ $\frac{\text{ض−غ}}{2}$ ....(ع4)

[طالب کو اس بات پہ غور دینا چاہیے کہ ع4 کا جانب داہنا ہسغ – ہسض ہے، نہ کہ ہسض – ہسغ۔]

95. ع1 سے ع4 تک کی یہ نسبتیں بہت اہم ہیں، تو انہیں خوب حفظ کر لینا چاہیے۔

ان کی اہمیت عظیم کی وجہ سے ہم اس مسئلہ کے لیے، جہاں ض و غ حادات ہوں، دلیل ہندسی بیان کر کریں گے۔

فرض کرو کہ بأض زاویہ ض ہے، بأغ زاویہ غ ہے۔ پھر زاویہ ضأغ کو خط مستقیم أف سے کاٹو۔ پھر أف میں ایک نقطہ د اخذ کرو، و قدر عمود بناو أد پہ جسے أض و أغ میں نقطہ ق و ر پہ ملاو حسب ترتیب۔

اب دل و قھ و رن عمود بناو أب پہ، و ر سے رکی عمود بناو دل یا قھ پہ جسے أن میں ک و ی پہ ملاو حسب ترتیب۔

چونکہ زاویہ غأض ض−غ ہے، تو غأف و فأض ہر ایک $\frac{\text{ض-غ}}{2}$ ہوا،

و ∠بأف = ∠بأغ+∠غأف = غ+ $\frac{\text{ض-غ}}{2}$ = $\frac{\text{ض+غ}}{2}$.

پھر چونکہ دونوں مثلثات دأر و دأق ہر اعتبار سے متساوی ہیں تو ہوا

أق = أر و در = دق

تو ہوا رق = 2رد

لہذا قی = 2دک و ری = 2رک یعنی ھن = 2ھل

لہذا ھق+نر = یق+2لک = 2کد+2لک = 2لد

و أھ+أن = 2أھ+ھن = 2أھ+2ھل = 2أل

لہذا $\text{سیض} + \text{سیغ} = \frac{\text{ھق}}{\text{أق}} + \frac{\text{نر}}{\text{أر}} = \frac{\text{ھق+نر}}{\text{أر}}$

$= 2\,\frac{\text{لد}}{\text{أر}} = 2\,\frac{\text{لدأد}}{\text{أدأر}} = 2\text{سیِ لأد ہس دأر}$

$= 2\,\text{سیِ}\,\frac{\text{ض+غ}}{2}\,\text{ہس}\,\frac{\text{ض-غ}}{2}$۔

[کیونکہ ∠کدر = 90° – ∠کدأ = ∠لأد = $\frac{\text{ض+غ}}{2}$]

و $\text{ہسض} + \text{ہسغ} = \frac{\text{أھ}}{\text{أق}} + \frac{\text{أن}}{\text{أر}} = \frac{\text{أھ + أن}}{\text{أر}}$

$= 2\,\frac{\text{أل}}{\text{أر}} = 2\,\frac{\text{أل}}{\text{أد}}\,\frac{\text{أد}}{\text{أر}} = 2\text{ہس لأد ہس دأر}$

$= 2\,\text{ہس}\,\frac{\text{ض+غ}}{2}\,\text{ہس}\,\frac{\text{ض-غ}}{2}$۔

.96 طالب کو چاہیے کہ وہ گزشتہ مضمون میں مذکور فالمولات سے خوب مانوس ہو جائے و انہیں عمل میں جاری کرنے کی خوب مشق کرے، کیونکہ یہ انسیت آگے اس کے لیے کافی مفید ہوگی۔

یہ فارمولات نہایت ہی اہم ہیں کیونکہ ان سے بعض مقادیر معین کے جمع و تفریق کو دیگر بعض مقادیر کے حواصل ضربی کے طور پہ تعبیر کیا جاتا ہے، و طالب کو حساب

جبر میں یہ معلوم ہو چکا ہوگا کہ مقادیر کے حاصل ضربی کو عکس تضرب سے بآسانی حل کیا جا سکتا ہے۔

ہم یہاں ان کے استعمال کی بعض امثلہ ذکر کر رہے ہیں۔

مثال 1: $\text{سی } 6\text{ص} + \text{سی } 4\text{ص} = 2 \text{ سی } \frac{6\text{ص} + 4\text{ص}}{2} \text{ ہس } \frac{6\text{ص} - 4\text{ص}}{2}$

$= 2 \text{ سی } 5\text{ص ہس ص}$

مثال 2: $\text{ہس } 3\text{ص} - \text{ہس } 7\text{ص} = 2 \text{ سی } \frac{3\text{ص} + 7\text{ص}}{2} \text{ سی } \frac{7\text{ص} - 3\text{ص}}{2}$

$= 2 \text{ سی } 5\text{ص سی } 2\text{ص}$ ۔

مثال 3: $$\frac{\text{ہس } 75° - \text{سی } 15°}{\text{ہس } 75° + \text{ہس } 15°} = \frac{2 \text{ ہس } \frac{75° + 15°}{2} \text{ سی } \frac{75° - 15°}{2}}{2 \text{ ہس } \frac{75° + 15°}{2} \text{ ہس } \frac{75° - 15°}{2}}$$

$$= \frac{2 \text{ ہس } 45° \text{ سی } 30°}{2 \text{ ہس } 45° \text{ ہس } 30°} = \text{مس } 30° = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} = 0.57735...$$

[اس مثال میں فارمولات سے تبسیط عبارت کیا ہے؛ ورنہ سی75°، سی15°، ہس75°، ہس15° کے لیے جدول دیکھنا، پھر ایک طویل کسر اعشاری سے دوسرے کو تقسیم کرنا دشوار و وقت لینے والا عمل تھا۔]

مثال 4: عبارت ذیل کی تبسیط کرو۔

$$\frac{(\text{ہس ص} - \text{ہس } 3\text{ص})(\text{سی } 8\text{ص} + \text{سی } 2\text{ص})}{(\text{سی } 5\text{ص} - \text{سی ص})(\text{ہس } 4\text{ص} - \text{ہس } 6\text{ص})}$$

مضمون 94 کا فارمولہ جاری کیا تو عبارت ہوئی۔

$$= \frac{2\,\text{سیہ}\,\frac{3ص + ص}{2}\,\text{سیہ}\,\frac{3ص - ص}{2} \times 2\,\text{سیہ}\,\frac{8ص + 2ص}{2}\,\text{ہسہ}\,\frac{8ص - 2ص}{2}}{2\,\text{ہسہ}\,\frac{5ص + ص}{2}\,\text{سیہ}\,\frac{5ص - ص}{2} \times 2\,\text{سیہ}\,\frac{4ص + 6ص}{2}\,\text{سیہ}\,\frac{6ص - 4ص}{2}}$$

$$= \frac{4 \times \text{سیہ } 2ص \text{ سیہ } ص \times \text{سیہ } 5ص \text{ ہسہ } 3ص}{4 \times \text{ہسہ } 3ص \text{ سیہ } 2ص \times \text{سیہ } 5ص \text{ سیہ } ص} = 1$$

97. مضمون 94 کے فارمولات (1)، (2)، (3)، (4) بھی بہت اہم ہیں، جنہیں شکل ذیل میں حفظ کرنا چاہیے۔

2 سیہ ب ہسہ ج = سیہ (ب+ج) + سیہ (ب-ج) ....(1)

2 ہسہ ب سیہ ج = سیہ (ب+ج) - سیہ (ب-ج) ....(2)

2 ہسہ ب ہسہ ج = ہسہ (ب+ج) + ہسہ (ب-ج) ....(3)

2 ہسہ ب ہسہ ج = ہسہ (ب+ج) - ہسہ (ب+ج) ....(4)

انہیں مضمون 94 کے فارمولات ع1 سے ع4 تک کا عکس کہا جا سکتا ہے۔

مثال 1: 2 سیہ 3ص ہسہ ص = سیہ 4ص + سیہ 2ص ۔

مثال 2: 2 سیہ 5ص سیہ 3ص = ہسہ 2ص - ہسہ 8ص ۔

مثال 3: 2 ہسہ 11ص ہسہ 2ص = ہسہ 13ص + ہسہ 9ص ۔

مثال 4: تبسیط کرو $\frac{\text{سیہ } 8ص \text{ ہسہ } ص - \text{سیہ } 6ص \text{ ہسہ } 3ص}{\text{ہسہ } 2ص \text{ ہسہ } ص - \text{سیہ } 3ص \text{ سیہ } 4ص}$

فارمولات گزشتہ کے اعتبار سے عبارت ہوئی

$$= \frac{\frac{1}{2}[\text{سیہ 9ص + سیہ 7ص}] - \frac{1}{2}[\text{سیہ 9ص + سیہ 3ص}]}{\frac{1}{2}[\text{ہسہ 3ص + ہسہ ص}] - \frac{1}{2}[\text{ہسہ ص − ہسہ 7ص}]}$$

$$= \frac{\text{سیہ 7ص − سیہ 3ص}}{\text{ہسہ 3ص + ہسہ 7ص}}$$

$$= \frac{\text{2 ہسہ 5ص سیہ 2ص}}{\text{2 ہسہ 5ص ہسہ 2ص}}$$ مضمون 94 کے فارمولا کے مطابق۔

$$= \text{مسہ 2ص}$$ ۔

[طالب کو حل مسئلہ کے حیلہ میں غور کرنا چاہیے کہ پہلے اس مضمون کے فارمولات مستعمل ہیں، پھر مزید تبسیط کے لیے مضمون 94 کے فارمولات معکوس مستعمل ہیں۔ یہ حیل تبسیط میں اکثر کارآمد ہوتے ہیں۔]

98. $\text{مسہ (ب + ج)} = \frac{\text{مسہ ب + مسہ ج}}{\text{1 − مسہ ب مسہ ج}}$ و $\text{مسہ (ب − ج)} = \frac{\text{مسہ ب − مسہ ج}}{\text{1 + مسہ ب مسہ ج}}$

مضمون 88 سے ب و ج کی تمام قیم کے لیے حاصل ہوا

$$\text{مسہ (ب + ج)} = \frac{\text{سیہ (ب + ج)}}{\text{ہسہ (ب + ج)}} = \frac{\text{سیہ ب ہسہ ج + ہسہ ب سیہ ج}}{\text{ہسہ ب ہسہ ج − سیہ ب ہسہ ج}}$$

پھر ماتحت و مافوق دونوں کو ہسہ ب ہسہ ج سے تقسیم کیا تو ہوا

$$= \frac{\frac{\text{سیہ ب}}{\text{ہسہ ب}} + \frac{\text{سیہ ج}}{\text{ہسہ ج}}}{1 - \frac{\text{سیہ ب}}{\text{ہسہ ب}}\,\frac{\text{سیہ ج}}{\text{ہسہ ج}}}$$

$$\therefore \textbf{مسہ (ب + ج)} = \frac{\textbf{مسہ ب + مسہ ج}}{\textbf{1 − مسہ ب مسہ ج}}$$

و مضمون 90 سے

$$\text{مس}\,(\text{ب} - \text{ج}) = \frac{\text{سیِ}\,(\text{ب} - \text{ج})}{\text{ہس}\,(\text{ب} - \text{ج})} = \frac{\text{سیِ ب ہس ج} - \text{ہس ب سیِ ج}}{\text{ہس ب ہس ج} + \text{سیِ ب ہس ج}}$$

پہلے کے مثل تقسیم کر کے

$$= \frac{\frac{\text{سیِ ب}}{\text{ہس ب}} - \frac{\text{سیِ ج}}{\text{ہس ج}}}{1 + \frac{\text{سیِ ب}}{\text{ہس ب}}\,\frac{\text{سیِ ج}}{\text{ہس ج}}}$$

$$\therefore\ \text{مس}\,(\text{ب} - \text{ج}) = \frac{\text{مس ب} - \text{مس ج}}{1 + \text{مس ب مس ج}}$$

99. گزشتہ مضمونات کے فارمولات رسمات 88 و 90 سے بذریعہ ہندسہ حاصل کیے جا سکتے ہیں۔

(1) مضمون 88 کے رسمہ کے مطابق حاصل ہوا

$$\text{مس}\,(\text{ب}+\text{ج}) = \frac{\text{ھد}}{\text{أھ}} = \frac{\text{قن} + \text{رد}}{\text{أھ} - \text{رن}}$$

$$= \frac{\frac{\text{قن}}{\text{أق}} + \frac{\text{رد}}{\text{أق}}}{1 - \frac{\text{رن}}{\text{أق}}} = \frac{\text{مس ب} + \frac{\text{رد}}{\text{أق}}}{1 - \frac{\text{رن}}{\text{رد}}\,\frac{\text{رد}}{\text{أق}}}$$

لیکن چونکہ زوایا ردن و قأن متساوی ہیں، تو مثلثات ردن و قأن متشابہ ہوئے۔

$$\frac{\text{رد}}{\text{دن}} = \frac{\text{أق}}{\text{أن}}$$

و تب

$$\frac{\text{رد}}{\text{أق}} = \frac{\text{دن}}{\text{أن}} = \text{مس ج}$$

لہذا $\text{مس}(\text{ب}+\text{ج}) = \dfrac{\text{مس ب} + \text{مس ج}}{1 - \text{مس ردن مس ج}} = \dfrac{\text{مس ب} + \text{مس ج}}{1 - \text{مس ب مس ج}}$

(2) مضمون 90 کے رسمہ کے مطابق حاصل ہوا

$$\text{مس}(\text{ب}-\text{ج}) = \frac{\text{ھد}}{\text{أھ}} = \frac{\text{قن} - \text{رد}}{\text{أق} + \text{نر}}$$

$$= \frac{\frac{\text{قن}}{\text{أق}} - \frac{\text{رد}}{\text{أق}}}{1 + \frac{\text{نر}}{\text{أن}}} = \frac{\text{مس ب} - \frac{\text{در}}{\text{أق}}}{1 + \frac{\text{نر}}{\text{در}} \frac{\text{در}}{\text{أق}}}$$

لیکن چونکہ زوایا ردن و نأق متساوی ہیں، تو ہوا

$$\frac{\text{در}}{\text{دن}} = \frac{\text{أق}}{\text{أن}}$$

و تب $\dfrac{\text{در}}{\text{أق}} = \dfrac{\text{دن}}{\text{أن}} = \text{مس ج}$

لہذا $\text{مس}(\text{ب}-\text{ج}) = \dfrac{\text{مس ب} - \text{مس ج}}{1 + \text{مس ردن مس ج}} = \dfrac{\text{مس ب} - \text{مس ج}}{1 + \text{مس ب مس ج}}$

100. فارمولات گزشتہ کے مخصوص مسایل۔ ج کو 45° کے متساوی بنا کے ہوا

$$\text{مس}(\text{ب}+45^\circ) = \frac{\text{مس ب} + 1}{1 - \text{مس ب}} = \frac{1 + \text{مس ب}}{1 - \text{مس ب}}$$

و $\text{مس}(\text{ب}-45^\circ) = \dfrac{\text{مس ب} - 1}{1 + \text{مس ب}}$

و ایسے ہی جیسے مضمون 88 میں ہے ویسے ہی ہم ثابت کر سکتے ہیں کہ

$$\text{قمس}(\text{ب}+\text{ج}) = \frac{\text{قمس ب قمس ج} - 1}{\text{قمس ب} + \text{قمس ج}}$$

$$\text{قمس}(\text{ب}-\text{ج}) = \frac{\text{قمس ب قمس ج} + 1}{\text{قمس ب} - \text{قمس ج}}$$

101. **مثال 1:**

$$\text{مس}\,75^\circ = \text{مس}\,(45^\circ+30^\circ) = \frac{\text{مس}\,45^\circ + \text{مس}\,30^\circ}{1 - \text{مس}\,45^\circ\,\text{مس}\,30^\circ} = \frac{1+\frac{1}{\sqrt{3}}}{1-\frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1} = \frac{(\sqrt{3}+1)^2}{3-1} = \frac{4+2\sqrt{3}}{2} = 2+\sqrt{3}$$

$$= 2 + 1.73205\ldots = 3.73205\ldots\,.$$

مثال 2:

$$\text{مس}\,15^\circ = \text{مس}\,(45^\circ-30^\circ) = \frac{\text{مس}\,45^\circ - \text{مس}\,30^\circ}{1 + \text{مس}\,45^\circ\,\text{مس}\,30^\circ} = \frac{1-\frac{1}{\sqrt{3}}}{1+\frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1} = \frac{(\sqrt{3}-1)^2}{3-1} = \frac{4-2\sqrt{3}}{2} = 2-\sqrt{3}$$

$$= 2 - 1.73205\ldots = 0.26795\ldots\,.$$

102. باب موجودہ کے فارمولات کی مزید امثلہ لیے ہم ایسے زاویہ کی قیم عام تلاشس گے جس کا سائن و ہمسائن و مماس معلوم ہو۔ اس کی بچث مضامین 82 سے 84 تک میں گزر چکی ہے۔

ان تمام زوایا کی قیمت عام بتاو جن کا ساین یکساں ہو۔

فرض کرو کہ ب کوئی زاویہ ہے جس کا ایک معلوم سائن ہے، و ج کوئی دوسرا زاویہ ہے جس کا سائن بھی وہی ہے۔

تو اب ج کی وہ سب سے عام قیمت معلوم کرنا ہے جو مذکورہ ذیل مساوات کو تمام کرے۔

سیِ جـ = سیِ بـ ،

یعنی سیِ جـ − سیِ بـ = 0.

ایسے بھی تحریر کیا جا سکتا ہے کہ

$$2 \text{ ہسِ } \frac{\text{جـ} + \text{بـ}}{2} \text{ سیِ } \frac{\text{جـ} - \text{بـ}}{2} = 0$$

و لہذا یہ تمام ہوگی

از ہسِ $\frac{\text{جـ} + \text{بـ}}{2} = 0$ ، و از سیِ $\frac{\text{جـ} - \text{بـ}}{2} = 0$ ۔

یعنی از $\frac{\text{جـ} + \text{بـ}}{2} = \frac{\pi}{2}$ کا کوئی کوئی تاق حاصل ضربی،

و از $\frac{\text{جـ} - \text{بـ}}{2} = \pi$ کا کوئی حاصل ضربی۔

یعنی از جـ = -بـ+π کا کوئی تاق حاصل ضربی.........(1)

و جـ = بـ+π کا کوئی جفت حاصل ضربی.........(2)

یعنی بالضرورت جـ = $(-1)^{\text{ط}}$بـ+طπ، و ط یہاں کوئی صحیح ایجابی یا سلبی ہے۔

کیونکہ جب ط تاق ہوگا تو یہ عبارت (1) کے مناسب ہوگی، و جب ط جفت ہوگا تو (2) کے۔

103. ان تمام زوایا کی قیمت عام معلوم کرنا جن کا ہمسائن یکساں ہو۔

اب ہم جو مساوات حل کریں گے وہ ہے

ہسِ ج = ہسِ بـ ،

یعنی ہسِ بـ − ہسِ جـ = 0،

$$\text{یعنی } 2 \text{ ہسِ } \frac{\text{جـ} + \text{بـ}}{2} \text{ سیِ } \frac{\text{جـ} - \text{بـ}}{2} = 0$$

ولہذا تمام ہوگی

از سیہ $\frac{ج+بہ}{2}$ = 0، و از سیہ $\frac{ج-بہ}{2}$ = 0 ۔

یعنی از $\frac{ج+بہ}{2}$ = π کوئی حاصل ضربی

و از $\frac{ج-بہ}{2}$ = π کوئلی حاصل ضربی

یعنی از ج = -بہ+2π کا کوئی حاصل ضربی

و از ج = بہ+2π کا کوئی حاصل ضربی

و مذکورہ دونوں مساوات کے حل ج = 2طπ±بہ میں شامل ہیں، و یہاں ط کوئی صحیح ایجابی یا سلبی ہے۔

104. ان تمام زوایا کی قیمت عام بتاو جن کا مماس یکساں ہو۔

تو اب جو مساوات ہمیں حل کرنا ہے وہ ہوئی

مس ج − مس بہ = 0

یعنی سیہ ج ہس بہ − ہس ج سیہ = 0

یعنی سیہ(ج − بہ) = 0

∴ ج − بہ = π کا کوئی حدصل ضربی = طπ

و یہاں ط کوئی صحیح ایجابی یا سلبی ہے۔

تو سب سے عام حل ہوا ج = طπ+بہ ۔

باب 8

زوایا کے حاصل ضربی و جز ضربی کے تناسبات تثلیثی۔

105. زاویہ 2ب کے تناسبات تثلیثی کو زاویہ ب کے تناسب کے اعتبار سے معلوم کرنا۔

اگر ہم مضمون 88 کے فارمولات میں ج = ب کر دیں، تو ہوگا

سیہ 2ب = سیہ ب ہسہ ب + ہسہ ب سیہ ب = **2 سیہ ب ہسہ ب**،

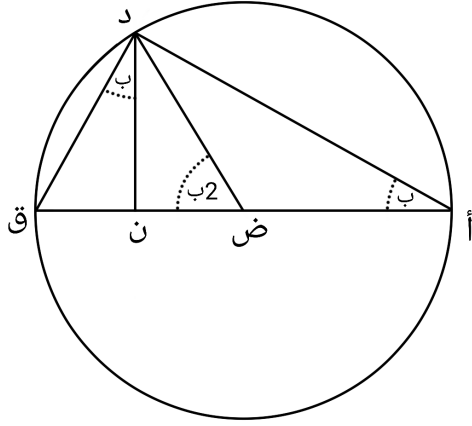
ہسہ 2ب = ہسہ ب ہسہ ب - سیہ ب سیہ ب = **ہسہ^2 ب - سیہ^2 ب**

= (1 - سیہ^2 ب) - سیہ^2 ب = **1 - 2 سیہ^2 ب**،

و

= ہسہ^2 ب - (1 - ہسہ^2 ب) = **2ہسہ^2 ب - 1**؛

و **مسہ 2ب** = $\frac{\text{مسہ ب + مسہ ب}}{\text{1 - مسہ ب مسہ ب}}$ = $\frac{\textbf{2مسہ ب}}{\textbf{1 - مسہ}^2\textbf{ ب}}$۔

چونکہ مضمون 88 کے فارمولات زوایا ب و ج کی تمام قیم کے لیے صادق ہیں؛ تو جو فارمولہ ان سے ماخوذ ہوگا وہ بھی ان زوایا کی تمام قیم کے لیے صادق ہوگا لا محالہ۔ تو یہاں مذکورہ بالا فارمولات ب کی تمام قیم کے لیے صادق ہیں۔

106. مضمون گزشتہ میں ب کی ان تمام قیم کے لیے جو قائمہ سے کم ہوں، فارمولات کی دلیل ہندسی بھی دی جا سکتی ہے۔

فرض کرو کہ قضد زاویہ 2ب ہے۔ و ض کو مرکز بنا کے اس پہ نصف قطر ضد کا دائرہ بناو، و قض کو أ پہ اس سے ملاو۔

پھر أد و دق کو ملاو، و أق پہ دن عمود بناو۔

اقلیدس 3-2 کے مطابق

زاویہ قأد = $\frac{1}{2}$ ∠قضد = ب، و زاویہ ندق = ∠قأد = ب،

لہذا سیِ 2ب = $\frac{\text{ند}}{\text{ضد}}$ = $\frac{\text{2ند}}{\text{2ضق}}$ = 2 $\frac{\text{ند}}{\text{أق}}$ = 2 $\frac{\text{ند}}{\text{أد}}$ $\frac{\text{أد}}{\text{أق}}$

= 2 سیِ نأد ہسِ دأق، کیونکہ أدق قائمہ ہے۔

= 2 سیِ ب ہسِ ب۔

و ہسِ 2ب = $\frac{\text{ضن}}{\text{ضد}}$ = $\frac{\text{2ضن}}{\text{أق}}$ = $\frac{\text{(أض+ضن)-(أض-ضن)}}{\text{أق}}$

= $\frac{\text{أن - نق}}{\text{أق}}$ = $\frac{\text{أن}}{\text{أد}}$ $\frac{\text{أد}}{\text{أق}}$ - $\frac{\text{نق}}{\text{دق}}$ $\frac{\text{دق}}{\text{أق}}$

= ہسِ^{2} ب - سیِ^{2} ب؛

و مسِ 2ب = $\frac{\text{ند}}{\text{ضن}}$ = $\frac{\text{2ند}}{\text{أن - نق}}$ = $\frac{2\,\frac{\text{ند}}{\text{أن}}}{1-\frac{\text{نق}}{\text{دن}}\,\frac{\text{دن}}{\text{أن}}}$

= $\frac{\text{2 مسِ ب}}{\text{1-مسِ}^2\text{ ب}}$

مثال: سیہ 15° و ہسہ 15° کی قیم بتاو۔

فرض کرو کہ زاویہ 2ب 30° ہے، تو ب 15° ہوا۔

و فرض کرو کہ نصف قطر ضد 2بہ ہے تو حاصل ہوا

ضن = 2بہ ہسہ 30° = بہ $\sqrt{30^\circ}$،

و نِد = 2بہ سیہ 30° = بہ ۔

لہذا أن = أض + ضن = بہ $(2 + \sqrt{3})$،

و نق = ضق - ضن = بہ $(2 - \sqrt{3})$۔

$\therefore$ أد^2 = أن × أق = بہ $(2 + \sqrt{3})$ × 4بہ (اقلیدس 6-8)،

تو ہوا أد = بہ $\sqrt{2}$ $(\sqrt{3} + 1)$،

و دق^2 = قن × قأ = بہ $(2 - \sqrt{3})$ × 4بہ ،

تو ہوا دق = بہ $\sqrt{2}(\sqrt{3} - 1)$

لہذا سیہ 15° = $\frac{\text{دق}}{\text{أق}}$ = $\frac{(\sqrt{3}-1)\sqrt{2}}{4}$ = $\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$

و ہسہ 15° = $\frac{\text{أد}}{\text{أق}}$ = $\frac{(\sqrt{3}+1)\sqrt{2}}{4}$ = $\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$

107. 3ب کے تناسبات تثلیثی کو ب کے تناسبات کے اعتبار سے حاصل کرنا۔

مضمون 88 میں ج کو 2ب کے متساوی بنا کے حاصل ہوا

سیہ 3ب = سیہ (ب + 2ب) = سیہ ب ہسہ 2ب + ہسہ ب سیہ 2ب

= سیہ (1 - 2 سیہ^2 ب) + ہسہ ب × 2 سیہ ب ہسہ ب

= سیہ (1 - 2 سیہ^2 ب) + 2 سیہ ب (1 - سیہ^2 ب)

لہذا $\textbf{سی}\,\mathbf{3}\textbf{ب} = \mathbf{3}\,\textbf{سی ب} - \mathbf{4}\,\textbf{سی}^{3}\,\textbf{ب}$ ....(1)

تو $\text{ہس}\,3\text{ب} = \text{ہس}\,(\text{ب} + 2\text{ب}) = \text{ہس ب ہس}\,2\text{ب} - \text{سی ب سی}\,2\text{ب}$

$= \text{ہس ب}\,(2\,\text{ہس}^{2}\,\text{ب} - 1) - \text{سی ب} \times 2\,\text{سی ب ہس ب}$

$= \text{ہس ب}\,(2\,\text{ہس}^{2}\,\text{ب} - 1) - 2\,\text{ہس ب}\,(1 - \text{ہس}^{2}\,\text{ب})$

لہذا $\textbf{ہس}\,\mathbf{3}\textbf{ب} = \mathbf{4}\,\textbf{ہس}^{3}\,\textbf{ب} - \mathbf{3}\,\textbf{ہس ب}$ ....(2)

و ایسے ہی $\text{مس}\,3\text{ب} = \text{مس}\,(\text{ب} + 2\text{ب}) = \dfrac{\text{مس ب} + \text{مس}\,2\text{ب}}{1 - \text{مس ب مس}\,2\text{ب}}$

$$= \frac{\text{مس ب} + \dfrac{2\,\text{مس ب}}{1 - \text{مس}^{2}\,\text{ب}}}{1 - \text{مس ب}\,\dfrac{2\,\text{مس ب}}{1 - \text{مس}^{2}\,\text{ب}}} = \frac{\text{مس ب}\,(1 - \text{مس}^{2}\,\text{ب}) + 2\,\text{مس ب}}{(1 - \text{مس}^{2}\,\text{ب}) - 2\,\text{مس}^{2}\,\text{ب}}$$

لہذا $\text{مس}\,3\text{ب} = \dfrac{3\,\text{مس ب} - \text{مس}^{3}\,\text{ب}}{1 - 3\,\text{مس}^{2}\,\text{ب}}$.

108. مضمون گزشتہ کے مثل، ص کے کسی بھی اعلی حواصل ضربی کے تناسبات تثلیثی کو ص کے تناسبات کے اعتبار سے تعبیر کیا جا سکتا ہے۔ لیکن یہ طریقہ کافی طویل و دشوار ہے، تو آیندہ باب میں اس کے لیے بہتر طرق بیان کیے جائیں گے۔

مثال کے طور پہ ہم 5ص کو ص کے اعتبار سے تعبیر کریں گے۔

$\text{ہس}\,5\text{ص} = \text{ہس}\,(3\text{ص} + 2\text{ص})$

$= \text{ہس}\,3\text{ص ہس}\,2\text{ص} - \text{سی}\,3\text{ص سی}\,2\text{ص}$

$= (4\text{ہس}^{3}\text{ص} - 3\text{ہسص})\,(2\text{ہس}^{2}\text{ص} - 1) - (3\text{سیص} - 4\text{سی}^{3}\text{ص})\,2\text{سیص ہسص}$.

$= (8\text{ہس}^{5}\text{ص} - 10\text{ہس}^{3}\text{ص} + 3\text{ہسص}) - 2\text{ہسص سی}^{2}\text{ص}\,(3 - 4\text{سی}^{2}\text{ص})$

$= (8\text{ہس}^{5}\text{ص} - 10\text{ہس}^{3}\text{ص} + 3\text{ہسص}) - 2\text{ہسص}\,(1 - \text{ہس}^{2}\text{ص})\,(4\text{ہس}^{2}\text{ص} - 1)$

$= (8\text{ہس}^{5}\text{ص} - 10\text{ہس}^{3}\text{ص} + 3\text{ہسص}) - 2\text{ہسص}\,(5\text{ہس}^{2}\text{ص} - 4\text{ہس}^{4}\text{ص} - 1)$

$= 16\text{ہس}^{5}\text{ص} - 20\text{ہس}^{3}\text{ص} + 5\text{ہسص}$.

109. چونکہ مضمون 105 میں بیان کردہ نسبتیں ب کی تمام قیم کے لیے صادق ہیں، تو

اگر ہم ب کو $\frac{\text{ب}}{2}$ سے تبدیل کر دیں تو بھی و صادق ہوں گی، و لہذا اگر 2ب کے بجائے $\frac{2\text{ب}}{2}$ یعنی ب کر دیں تب بھی۔

لہذا ہمیں تین نسبتیں حاصل ہوئیں

$$\textbf{سی ب} = 2\ \textbf{سی}\ \frac{\text{ب}}{2}\ \textbf{ہس}\ \frac{\text{ب}}{2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

$$\textbf{ہس ب} = \textbf{ہس}^2\frac{\text{ب}}{2} - \textbf{سی}^2\frac{\text{ب}}{2} = 2\textbf{ہس}^2\frac{\text{ب}}{2} - 1 = 1 - 2\ \textbf{سی}^2\frac{\text{ب}}{2} \quad \ldots\ldots\ldots (2)$$

$$\text{و}\quad \textbf{مس ب} = \frac{2\ \textbf{مس}\ \frac{\text{ب}}{2}}{1 - \textbf{مس}^2\frac{\text{ب}}{2}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

از (1) ہمیں حاصل ہوا

$$\text{سی ب} = \frac{2\ \text{سی}\ \frac{\text{ب}}{2}\ \text{ہس}\ \frac{\text{ب}}{2}}{\text{ہس}^2\frac{\text{ب}}{2} + \text{سی}^2\frac{\text{ب}}{2}} = \frac{2\ \text{مس}\ \frac{\text{ب}}{2}}{1 + \text{مس}^2\frac{\text{ب}}{2}}\text{،}$$

ما فوق و ما تحت کو $\text{ہس}^2\frac{\text{ب}}{2}$ سے تقسیم کر کے۔

$$\text{تو}\quad \text{ہس ب} = \frac{\text{ہس}^2\frac{\text{ب}}{2} - \text{سی}^2\frac{\text{ب}}{2}}{\text{ہس}^2\frac{\text{ب}}{2} + \text{سی}^2\frac{\text{ب}}{2}} = \frac{1 - \text{مس}^2\frac{\text{ب}}{2}}{1 + \text{مس}^2\frac{\text{ب}}{2}}\ .$$

110. زاویہ $\frac{\text{ب}}{2}$ کے تناسبات تثلیثی کو ہس ب کے اعتبار سے تعبیر کرنا۔

مضمون گزشتہ کی مساوات (2) سے

$$\text{ہس ب} = 1 - 2\text{سی}^2\frac{\text{ب}}{2}\text{،}$$

$$\text{تو ہوا}\quad 2\text{سی}^2\frac{\text{ب}}{2} = 1 - \text{ہس ب}\ \text{،}$$

لہذا $\text{سیٖ}\,\frac{ب}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\text{ہس ب}}{2}}$ ....(1)

پھر $\text{ہس ب} = 2\,\text{ہس}^2\frac{ب}{2} - 1$،

تو ہوا $2\,\text{ہس}^2\frac{ب}{2} = 1 + \text{ہس ب}$،

و لہذا $\text{ہس}\,\frac{ب}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\text{ہس ب}}{2}}$ ....(2)

لہذا $\text{مس}\,\frac{ب}{2} = \frac{\text{سیٖ}\,\frac{ب}{2}}{\text{ہس}\,\frac{ب}{2}} = \pm\sqrt{\frac{1-\text{ہس ب}}{1+\text{ہس ب}}}$ ....(3)

111. گزشتہ فارمولات میں سے ہر ایک میں رمز مبہم موجود ہے۔ تو ان کے کسی جزئی مسئلہ میں اس کی رمز مخصوص کیسے معلوم کرنا ہے یہ آیندہ امثلہ میں بتایا گیا ہے۔

مثال 1: معلوم ہے کہ $\text{ہس}\,45° = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ، تو $\text{سیٖ}\,22\frac{1}{2}°$ و $\text{ہس}\,22\frac{1}{2}°$ کی قیم بتاو۔

مضمون گزشتہ کی مساوات (1) میں ب کو 45° بنا کے حاصل ہوا

$$\text{سیٖ}\,22\frac{1}{2}° = \pm\sqrt{\frac{1-\text{ہس}\,45°}{2}} = \pm\sqrt{\frac{1-\frac{1}{\sqrt{2}}}{2}} = \pm\sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{4}}$$

اب $\text{سیٖ}\,22\frac{1}{2}°$ لازما ایجابی ہوگا، لہذا اوپر والا رمز اختیار کیا جائے گا۔

تو ہوا $\text{سیٖ}\,22\frac{1}{2}° = \frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}$

تو $\text{ہس}\,22\frac{1}{2}° = \pm\sqrt{\frac{1+\text{ہس}\,45°}{2}} = \pm\sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{4}} = \pm\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}$

ایسے ہی ہسہ $22\frac{1}{2}^\circ$ ایجابی ہے

$$\therefore \text{ہسہ } 22\frac{1}{2}^\circ = \sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{2}}$$

مثال 2: معلوم ہے کہ ہسہ $330^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$، تو سیہ 165° و ہسہ 165° کی قیم بتاو۔

مساوات (1) سے معلوم ہوا

$$\text{سیہ } 165^\circ = \pm\sqrt{\frac{1 - \text{ہسہ } 330^\circ}{2}} = \pm\sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}} = \pm\sqrt{\frac{4-2\sqrt{3}}{8}}$$

$$= \pm\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$$

و

$$\text{ہسہ } 165^\circ = \pm\sqrt{\frac{1 + \text{ہسہ } 330^\circ}{2}} = \pm\sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}} = \pm\sqrt{\frac{4+2\sqrt{3}}{8}}$$

$$= \pm\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$$

اب 165° چونکہ 90° و 180° کے درمیان واقع ہے، تو مضمون 52 کے مطابق اس کا سائن ایجابی و ہمسائن سلبی ہوگا۔

لہذا سیہ $165^\circ = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$

و ہسہ $165^\circ = -\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$

امثلۂ مذکور سے معلوم ہوا کہ جب زاویہ ب و اس کا ہمسائن معلوم ہوں، تو زاویہ ب\2 کے تناسبات رمز میں ابہام کے بغیر حاصل کیے جا سکتے ہیں۔

لیکن اگر صرف ہس ب معلوم ہو تو سیِ ب\2 و ہس ب\2 کو حاصل کرنے میں ابہام ہوگا۔

و اس ابہام کا بیان اگلے مضمون میں ہے۔

112. بیان کہ ہس ب کی قیمت سے سیِ $\frac{\text{ب}}{2}$ و ہس $\frac{\text{ب}}{2}$ کو حاصل کرنے میں ابہام کیوں ہے۔

ہمیں معلوم ہے کہ اگر ط کوئی عدد صحیح ہے، تو

ہس ب = ہس $(2\text{ط}\pi \pm \text{ب})$ = غ (کہ لو)

لہذا کوئی فارمولہ جس سے غ کے اعتبار سے ہس $\frac{\text{ب}}{2}$ حاصل ہو، تو $\frac{2\text{ط}\pi \pm \text{ب}}{2}$ کا ہمسائن بھی حاصل ہونا چاہیے۔

اب

$$\text{ہس}\ \frac{2\text{ط}\pi \pm \text{ب}}{2} = \text{ہس}\left(\text{ط}\pi \pm \frac{\text{ب}}{2}\right)$$

$$= \text{ہس ط}\pi\ \text{ہس}\ \frac{\text{ب}}{2} \pm \text{سیِ ط}\pi\ \text{سیِ}\ \frac{\text{ب}}{2} = \text{ہس ط}\pi\ \text{ہس}\ \frac{\text{ب}}{2}$$

$$= \pm\ \text{ہس}\ \frac{\text{ب}}{2}$$ ، ط کے جفت یا تاق ہونے کے اعتبار سے۔

ایسے ہی کوئی فارمولہ جس سے غ کے اعتبار سے سیِ $\frac{\text{ب}}{2}$ حاصل ہو، تو $\frac{2\text{ط}\pi \pm \text{ب}}{2}$ کا سائن بھی حاصل ہونا چاہیے۔

و

$$\text{سیِ}\ \frac{2\text{ط}\pi \pm \text{ب}}{2} = \text{سیِ}\left(\text{ط}\pi \pm \frac{\text{ب}}{2}\right)$$

$$= \text{سیِ ط}\pi\ \text{ہس}\ \frac{\text{ب}}{2} \pm \text{ہس ط}\pi\ \text{سیِ}\ \frac{\text{ب}}{2} = \pm\ \text{ہس ط}\pi\ \text{سیِ}\ \frac{\text{ب}}{2}$$

$$= \pm\ \text{سیِ}\ \frac{\text{ب}}{2}\ .$$

لہذا ہر مسئلہ میں ہم ہس $\frac{ب}{2}$ و سیہ $\frac{ب}{2}$ کی دو قیم حاصل کرنے کی امید کرتے ہیں، و یہی بات مضمون 110 میں معلوم ہوئی ہے۔

113. زاویہ $\frac{ب}{2}$ کے تناسبات تثلیثی کو سیہ ب کے اعتبار سے تعبیر کرنا۔

مضمون 109 کی مساوات (1) سے حاصل ہوا

2 سیہ $\frac{ب}{2}$ ہس $\frac{ب}{2}$ = سیہ ب ....(1)

و سیہ² $\frac{ب}{2}$ + ہس² $\frac{ب}{2}$ = 1، ہمیشہ ....(2)

اولا، ان مساوات کو جمع کیا، پھر تفریق کیا، تو حاصل ہوا

سیہ² $\frac{ب}{2}$ + 2 سیہ $\frac{ب}{2}$ ہس $\frac{ب}{2}$ + ہس² $\frac{ب}{2}$ = 1 + سیہ ب،

و سیہ² $\frac{ب}{2}$ - 2 سیہ $\frac{ب}{2}$ ہس $\frac{ب}{2}$ + ہس² $\frac{ب}{2}$ = 1 - سیہ ب؛

یعنی (سیہ $\frac{ب}{2}$ + ہس $\frac{ب}{2}$)² = 1 + سیہ ب،

و (سیہ $\frac{ب}{2}$ – ہس $\frac{ب}{2}$)² = 1 – سیہ ب؛

تو ہوا سیہ $\frac{ب}{2}$ + ہس $\frac{ب}{2}$ = ± √(1 + سیہ ب) ....(3)

و سیہ $\frac{ب}{2}$ - ہس $\frac{ب}{2}$ = ± √(1 - سیہ ب) ....(4)

اب جمع پھر تفریق کیا، تو حاصل ہوا

2 سیہ $\frac{ب}{2}$ = ± √(1 + سیہ ب) ± √(1 - سیہ ب) ....(5)

و 2 ہس $\frac{ب}{2}$ = ± √(1 + سیہ ب) ± √(1 - سیہ ب) ....(6)

اب $\frac{ب}{2}$ کے دیگر تناسبات بآسانی حاصل ہو جائیں گے۔

114. دونوں فارمولات (5) و (6) میں سے ہر ایک میں دو مبہم رموز ہیں۔ تو آیندہ امثلہ میں یہ بیان کیا گیا ہے کہ کسی جزئی مسئلہ میں ابہام کو کیسے واضح کرنا ہے۔

مثال 1: معلوم ہے کہ سی 30° ہے $\frac{1}{2}$ ، تو سی 15° و ہس 15° کی قیم بتاو۔

ب = 30° کر کے نسبت (3) و (4) سے حاصل ہوا

سی 15° + ہس 15° = $\pm\sqrt{1 + \text{سی } 30^\circ} = \pm\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$ ،

سی 15° - ہس 15° = $\pm\sqrt{1 - \text{سی } 30^\circ} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ ؛

اب سی 15° و ہس 15° دونوں ایجابی ہیں و ہس 15° سی 15° سے زیادہ ہے۔

لہذا عبارات سی 15° + ہس 15° و سی 15° - ہس 15° ایجابی و سلبی ہوئیں حسب ترتیب۔

لہذا اوپر کی دو نسبتیں ہونی چاہییے

سی 15° + ہس 15° = $+\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$ و سی 15° - سی 15° = $-\frac{1}{\sqrt{2}}$

لہذا سی 15° = $\frac{1-\sqrt{3}}{\sqrt{2}\ 2}$، و ہس 15° = $\frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{2}\ 2}$ ۔

مثال 2: معلوم ہے کہ سی 570° متساوی ہے $-\frac{1}{2}$ کے، تو بتاو کہ سی 285° و ہس 285° کی قیم کیا ہوئی۔

ب = 570° کر کے حاصل ہو

سی 285° + ہس 285° = $\pm\sqrt{1 + \text{سی } 570^\circ} = \pm\frac{1}{2}$ ،

و سی 285° - ہس 285° = $\pm\sqrt{1 - \text{سی } 570^\circ} = \pm\sqrt{\frac{3}{2}}$ ۔

اب سیٖ 285° سلبی ہے، و ہس 285° ایجابی ہے؛ و پہلے والا عددا دوسرے سے بڑا ہے جو کہ رسمہ سے معلوم کیا جا سکتا ہے۔

لہذا سیٖ 285° + ہس 285° سلبی ہوا، و سیٖ 285° - ہس 285° بھی سلبی ہوا۔

∴ سیٖ 285° + ہس 285° = $-\frac{1}{\sqrt{2}}$،

و سیٖ 285° - ہس 285° = $-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$۔

لہذا سیٖ 285° = $-\frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$،

و ہس 285° = $-\frac{1-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$۔

115. بیان کہ سیٖ ب کی قیمت سے سیٖ $\frac{ب}{2}$ و ہس $\frac{ب}{2}$ حاصل کرنے میں ابہام کیوں واقع ہوتا ہے۔

ہمیں معلوم ہے کہ اگر ط کوئی عدد صحیح ہو، تو

سیٖ {طπ+(-1)^{ط}ب} = سیٖ ب = غ (کہ لو) (مضمون 82)

لہذا اگر کوئی فارمولہ ہمیں ب کے اعتبار سے سیٖ $\frac{ب}{2}$ بتائے، تو اسے ہمیں $\frac{ط\pi + (-1)^{ط}ب}{2}$ کا سائن بھی بتانا چاہیے۔

اولا، فرض کرو کہ ط جفت و 2ظ کے متساوی ہے،

تو سیٖ $\frac{ط\pi + (-1)^{ط}ب}{2}$ = سیٖ$\left(ظ\pi + \frac{ب}{2}\right)$

= سیٖ ظπ ہس $\frac{ب}{2}$ + ہس ظπ سیٖ $\frac{ب}{2}$ = ہس ظπ سیٖ $\frac{ب}{2}$،

= ± سیٖ $\frac{ب}{2}$ ، ظ کے تاق یا جفت ہونے کے اعتبار سے۔

ثانیا، فرض کرو کہ ط تاق و 2ذ+1 کے متساوی ہے،

$$\text{تو سیہ}\ \frac{\text{ط}\pi + (-1)^{\text{ط}}\,\text{ب}}{2} = \text{سیہ}\ \frac{2\text{ذ}\pi + \pi - \text{ب}}{2} = \text{سیہ}\left[\text{ذ}\pi + \frac{\pi - \text{ب}}{2}\right]$$

$$= \text{سیہ ذ}\pi\ \text{ہسہ}\ \frac{\pi - \text{ب}}{2} + \text{ہسہ ذ}\pi\ \text{سیہ}\ \frac{\pi - \text{ب}}{2} = \text{ہسہ ذ}\pi\ \text{ہسہ}\ \frac{\text{ب}}{2}$$

$= \pm$ ہسہ $\frac{\text{ب}}{2}$ ، ذ کے جفت و تاق ہونے کے مطابق۔

لہذا کوئی فارمولہ جو ہمیں سیہ ب کے اعتبار سے سیہ $\frac{\text{ب}}{2}$ بتائے، تو اسے - سیہ $\frac{\text{ب}}{2}$ ، ہسہ $\frac{\text{ب}}{2}$ و - ہسہ $\frac{\text{ب}}{2}$ کی قیم بھی بتانا چاہیے، یعنی کل 4 قیم۔ یہ ان قیم کی تعداد ہے جو ہمیں مضمون 113 کے فارمولات سے مبہم طور پہ حاصل ہوئی ہیں۔

و ایسے ہی یہ بھی ثابت کیا جا سکتا ہے کہ جب سیہ ب سے ہسہ $\frac{\text{ب}}{2}$ حاصل کیا جائے، تب بھی 4 قیم کی امید رکھنا ہے۔

116. اب ہم دکھائیں گے کہ کسی مسئلہ میں نسبت (3) و (4) کے ابہام کو کیسے واضح کرنا ہے۔

ہمیں معلوم ہے

$$\text{سیہ}\ \frac{\text{ب}}{2} + \text{ہسہ}\ \frac{\text{ب}}{2} = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\ \text{سیہ}\ \frac{\text{ب}}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}\ \text{ہسہ}\ \frac{\text{ب}}{2}\right)$$

$$= \sqrt{2}\left[\text{سیہ}\ \frac{\text{ب}}{2}\ \text{ہسہ}\ \frac{\pi}{4} + \text{ہسہ}\ \frac{\text{ب}}{2}\ \text{سیہ}\ \frac{\pi}{4}\right] = \sqrt{2}\ \text{سیہ}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\text{ب}}{2}\right)$$

اس مساوات کا جانب بایاں ایجابی ہوگا اگر

$\frac{\pi}{4}$ + $\frac{ب}{2}$ واقع ہو 2طπ و 2طπ + π کے درمیاں،

یعنی اگر $\frac{ب}{2}$ واقع ہو 2طπ - $\frac{\pi}{4}$ و 2طπ + $\frac{3\pi}{4}$ کے درمیان۔

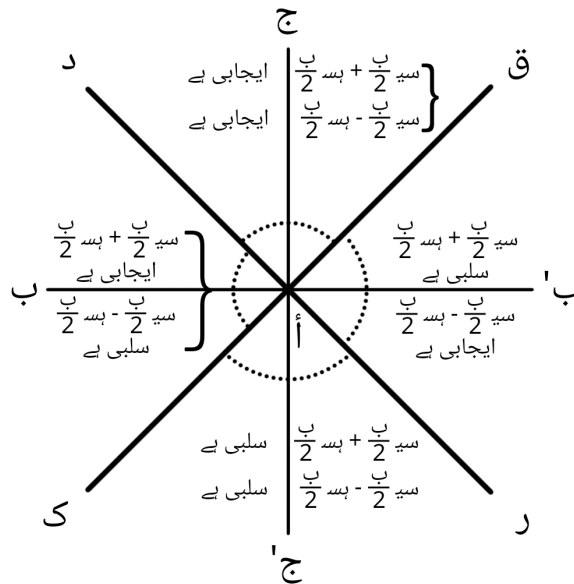
لہذا سیہ $\frac{ب}{2}$ + ہسہ $\frac{ب}{2}$ ایجابی ہوگا اگر $\frac{ب}{2}$ واقع ہو

2طπ - $\frac{\pi}{4}$ و 2طπ + $\frac{3\pi}{4}$ کے درمیان؛ ورنہ سلبی ہوگا۔

و ایسے ہی ہم ثابت کر سکتے ہیں کہ

سیہ $\frac{ب}{2}$ - ہسہ $\frac{ب}{2}$ = √2 سیہ $\left(\frac{ب}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$

لہذا سیہ $\frac{ب}{2}$ - ہسہ $\frac{ب}{2}$ ایجابی ہوگا اگر $\left(\frac{ب}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$ واقع ہو 2طπ و 2طπ + π کے درمیان، یعنی اگر $\frac{ب}{2}$ واقع ہو 2طπ + $\frac{\pi}{4}$ و 2طπ + $\frac{5\pi}{4}$ کے درمیان؛ ورنہ سلبی ہوگا۔

اس مضمون کے نتائج آیندہ رسمہ میں نمایا ہیں۔

رسمہ مزکور میں أب خط ابتدائی ہے؛ و أد، أق، أر، أک نے پہلے، دوسرے، تیسرے،
چوتھے ربع میں زوایا بنایا ہے حسب ترتیب۔

مثال عددی: $\frac{ب}{2}$ کن منتھاوں میں ہوگا اگر 2 سیہ $\frac{ب}{2}$ = - $\sqrt{1 + سیہ\ ب}$ - $\sqrt{1 - سیہ\ ب}$
اس مسئلہ میں مضمون 113 کے فارمولات ہوئے

سیہ $\frac{ب}{2}$ + ہسہ $\frac{ب}{2}$ = - $\sqrt{1 + سیہ\ ب}$ ....(1)

سیہ $\frac{ب}{2}$ + ہسہ $\frac{ب}{2}$ = - $\sqrt{1 - سیہ\ ب}$ ....(2)

کیونکہ ان دونو فارمولات کا اجتماع فارمولۂ مذکور دیتا ہے۔
از (1) لازم ہے کہ خط دورانی جس نے زاویہ $\frac{ب}{2}$ کو گھیرا وہ أق و أر کے درمیان ہوگی
یا پھر أر و أک کے درمیان۔
از (2) لازم ہے کہ خط دورانی أر و أک یا أک و أد کے درمیان ہوگی۔
تو یہ دونوں شرائط تبھی تمام ہوں گی جب خط دورانی أر و أک کے درمیان واقع ہو۔
لہذا زاویہ $\frac{ب}{2}$ واقع ہوا 2طπ - $\frac{3\pi}{4}$ و 2طπ - $\frac{\pi}{4}$ کے درمیان۔

117. $\frac{ب}{2}$ کے تناسبات تثلیثی کو مسہ ب کے اعتبار سے تعبیر کرنا۔
مضمون 109 کی مساوات (3) سے حاصل ہوا

$$مسہ\ ب = \frac{2\ مسہ \frac{ب}{2}}{1 - مسہ^2 \frac{ب}{2}}$$

$$\therefore\ 1 - مسہ^2 \frac{ب}{2} = \frac{2}{مسہ\ ب} مسہ \frac{ب}{2}$$

$$\text{لہذا}\quad \text{مس}^2\frac{\text{ب}}{2} + \frac{2}{\text{مس ب}}\,\text{مس}\frac{\text{ب}}{2} + \frac{1}{\text{مس}^2\text{ب}} = 1 + \frac{1}{\text{مس}^2\text{ب}} = \frac{1 + \text{مس}^2\text{ب}}{\text{مس}^2\text{ب}}$$

$$\therefore\ \text{مس}\frac{\text{ب}}{2} + \frac{1}{\text{مس ب}} = \pm\frac{\sqrt{1 + \text{مس}^2\text{ب}}}{\text{مس ب}}$$

$$\therefore\ \text{مس}\frac{\text{ب}}{2} = \pm\frac{\sqrt{1 + \text{مس}^2\text{ب}} - 1}{\text{مس ب}}\ \ldots\ldots\ldots(1)$$

118. مساوات (1) کا رمز مبہم تبھی واضح ہو پائے گا جب ہمیں ب کی مقدار کے بارے میں کچھ معلوم ہوگا۔

مثال: معلوم ہے کہ مس 15° = 2 - √3، تو بتاو مس $7\frac{1}{2}$° کیا ہوا۔

ب = 15° کر کے مضمون گزشتہ کی مساوات (1) کے مطابق ہوا کہ

$$\text{مس}\ 7\frac{1}{2}^\circ = \frac{\pm\sqrt{1 + (2 - \sqrt{3})^2} - 1}{2 - \sqrt{3}} = \frac{\pm\sqrt{8 - 4\sqrt{3}} - 1}{2 - \sqrt{3}}\ \ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

اب مس $7\frac{1}{2}$° ایجابی ہے تو ہم اوپر والا رمز لیں گے۔

$$\text{لہذا}\quad \text{مس}\ 7\frac{1}{2}^\circ = \frac{+(\sqrt{6} - \sqrt{2}) - 1}{2 - \sqrt{3}}$$

$$= (\sqrt{6} - \sqrt{2} - 1)(2 + \sqrt{3}) = \sqrt{6} - \sqrt{3} + \sqrt{2} - 2 = (\sqrt{3} - \sqrt{2})(\sqrt{2} - 1)$$

چونکہ مس 15° = مس 195°، تو جس مساوات نے ہمیں مس 15° کے اعتبار مس $\frac{15}{2}$° بتایا، اس سے امید کی جا سکتی ہے کہ مس 195° کے اعتبار سے مس $\frac{195}{2}$° بھی بتائے، بلکہ (1) سے جو قیمت حاصل ہوئی ہے اس کے قبل رمز سلبی اختیار کر کے وہ قیمت ہوگی مس $\frac{195}{2}$° کی۔

لہذا مس $\frac{195°}{2} = \frac{1-\sqrt{\sqrt{3}\,4-8}-}{\sqrt{3}-2} = \frac{1-(\sqrt{2}-\sqrt{6})-}{\sqrt{3}-2}$

$= (1-\sqrt{2}+\sqrt{6}-)(\sqrt{3}+2) = -(\sqrt{2}+\sqrt{3})(1+\sqrt{2})$

تو ہوا - قمس $7\frac{1}{2}° =$ مس $97\frac{1}{2}° = -(\sqrt{2}+\sqrt{3})(1+\sqrt{2})$۔

119. بیان کہ جب مس $\frac{\text{ب}}{2}$ کو مس ب کی قیمت سے حاصل کیا تو اس میں ابہام کیوں آیا۔

مضمون 84 سے معلوم ہوا کہ اگر ط کوئی عدد صحیح ہو تو

مس (طπ + ب) = مس ب = غ (کہ لو)۔

لہذا کوئی مساوات جو ہمیں غ کے اعتبار سے مس $\frac{\text{ب}}{2}$ بتائے، تو اسے مس $\frac{\text{ط}\pi + \text{ب}}{2}$ بھی بتانا چاہیے۔

اولاً، فرض کرو کہ ط جفت ہے و متساوی ہے 2ظ کے،

تو مس $\frac{\text{ط}\pi + \text{ب}}{2} =$ مس $\frac{2\text{ظ}\pi + \text{ب}}{2} =$ مس $\left(\text{ظ}\pi + \frac{\text{ب}}{2}\right)$

= مس $\frac{\text{ب}}{2}$، جیسا کہ مضمون 84 میں ہے۔

ثانیا، فرض کرو کہ ط طاق ہے و متساوی ہے 2ذ + 1 کے۔

تو مس $\frac{\text{ط}\pi + \text{ب}}{2} =$ مس $\frac{(2\text{ذ}+1)\,\pi + \text{ب}}{2}$

= مس $\left(\text{ذ}\pi + \frac{\pi + \text{ب}}{2}\right)$ مس $\frac{\pi + \text{ب}}{2}$ (مضمون 84)

= - قمس $\frac{\text{ب}}{2}$ (مضمون 70)۔

لہذا وہ فارمولہ جس نے ہمیں مس $\frac{\text{ب}}{2}$ کی قیمت بتایا، اسے - قمس $\frac{\text{ب}}{2}$ کی قیمت بھی بتانا چاہیے۔ اس بات کو گزشتہ مضمون کی مثال میں نمایا کیا گیا ہے۔

120. باب جاری کے فارمولات استعمال کر کے ہم اب کچھ اہم زوایا کے تناسبات تثلیثی حاصل کریں گے۔

اس میں سے زاویہ 18° کے تناسبات معلوم کرنا ہے۔

فرض کرو کہ ص سے مراد 18° ہے، تو 2ص 36° ہوا و 3ص 54° ہوا۔

لہذا 2ص = 90° - 3ص ،

تو سیہ 2ص = سیہ (90° - 3ص) = ہسہ 3ص

∴ 2 سیہ ص ہسہ ص = 4 ہسہ^3 ص - 3 ہسہ ص (مضمون 105 و 107)

لہذا ہسہ ص = 0، جس سے لازم ہے ص = 90°

یا 2 سیہ ص = 4 ہسہ^2 ص - 3 = 1 - 4 سیہ^2 ص .

∴ 4 سیہ^2 ص + 2 سیہ ص = 1.

مساوات تربیعی کو حل کر کے حاصل ہوا

سیہ ص = $\frac{\pm\sqrt{5} - 1}{4}$.

ہمارے مسئلہ میں سیہ ص لازماً ایک مقدار ایجابی ہے،

لہذا ہم نے اوثر والا رمز اختیار کیا، تو ہوا

سیہ 18° = $\frac{\sqrt{5} - 1}{4}$.

لہذا ہسہ 18° = $\sqrt{1 - }$ سیہ^2 18° = $\sqrt{1 - \frac{6 - 2\sqrt{5}}{16}} = \sqrt{\frac{10 + 2\sqrt{5}}{16}}$

= $\frac{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{4}$

اب 18° کے دیگر تناسبات تثلیثی معلوم کیے جا سکتے ہیں۔

چونکہ 72° 18° کا اتمامی ہے، تو 72° کے تناسبات کی قیم مضمون 69 کے استعمال سے حاصل کی جا سکتی ہیں۔

121. و اس میں سے 36° کے تناسبات تثلیثی حاصل کرنا ہے۔

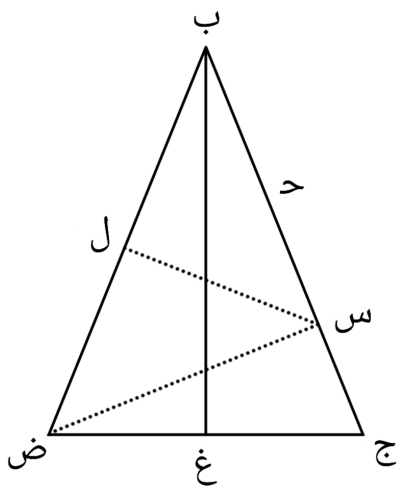
چونکہ ہس 2ص = 1 - 2 سی^2 ص (مضمون 105)،

$\therefore$ ہس 36° = 1 - 2 سی^2 18° = $1 - 2\left(\frac{6 - 2\sqrt{5}}{16}\right) = 1 - \frac{3 - \sqrt{5}}{4}$

تو **ہس 36° = $\frac{1 + \sqrt{5}}{4}$** .

لہذا سی 36° = $\sqrt{1 -$ ہس$^2 36°}$ = $\sqrt{1 - \frac{6 + 2\sqrt{5}}{16}} = \frac{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{4}$

اب 36° کے باقی دالات تثلیثی حاصل کیے جا سکتے ہیں۔

پھر چونکہ 54° 36° کا اتمامی ہے، تو 54° کے دالات کی قیم مضمون 69 کے استعمال سے حاصل کی جا سکتی ہیں۔

122. سی 18° و ہس 36° کی قیمت ہندسہ سے بھی معلوم کی جا سکتی ہے۔

فرض کرو کہ ب‌ج‌ض ایک زاویہ ہے جو اقلیدس 10-4 کے مثل بنا ہے، تو زوایا ج و ض میں سے ہر ایک ب کا دو گنا ہوا۔

تو 180° = ب+ج+ض = ب+2ب+2ب

تو ہوا ب = 36°

لہذا اگر جض پہ بغ عمود بنایا تو ہوا

$$\angle \text{جبغ} = 18°$$

اقلیدس سے معلوم ہوا کہ جض متساوی ہے بس کے، و س ایک نقطہ ہے بج پہ، کہ

$$\text{بج} \times \text{جس} = \text{بس}^2$$

فرض کرو کہ بج = بـ و بس = حـ۔

تو اس نسبت سے حاصل ہوا

$$\text{بـ}(\text{بـ} - \text{حـ}) = \text{حـ}^2$$

یعنی $\text{حـ}^2 + \text{بـحـ} = \text{بـ}^2$

یعنی $\text{حـ} = \text{بـ} \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$

لہذا $\text{سیِ} 18° = \text{سیِ جبغ} = \frac{\text{جغ}}{\text{جب}} = \frac{1}{2} \frac{\text{جض}}{\text{جب}}$

$$= \frac{1}{2} \frac{\text{حـ}}{\text{بـ}} = \frac{1 - \sqrt{5}}{4}$$

پھر (اقلیدس 4-10 سے) ہمیں معلوم ہے کہ بس و سض متساوی ہیں،

لہذا اگر سل بض پہ عمود ہو تو ل خط بض کو گاٹے گا۔

لہذا $36° = \frac{\text{بل}}{\text{بس}} = \frac{\text{بـ}}{2} \div \text{حـ} = \frac{1}{1 - \sqrt{5}}$

$$= \frac{1 + \sqrt{5}}{(1+\sqrt{5})(1-\sqrt{5})} = \frac{1 + \sqrt{5}}{4}$$

123. اس میں سے 9° کے زاویہ کے تناسبات تثلیثی معلوم کرنا ہے۔

چونکہ سیہ 9° و ہسہ 9° دونوں ایجابی ہیں، تو مضمون 113 کی نسبت (3) سے حاصل

ہوا سیہ 9° + ہسہ 9° = $\sqrt{1 + \text{سیہ } 18^\circ}$

$$= \sqrt{1 + \frac{1 - \sqrt{5}}{4}} = \frac{\sqrt{\sqrt{5} + 3}}{2} \quad \text{............(1)}$$

پھر چونکہ ہسہ 9° بڑا ہے سیہ 9° سے (مضمون 53) تو مقدار سیہ 9° - ہسہ 9° سلبی

ہوئی، لہذا مضمون 113 کی نسبت 4 سے حاصل ہوا

سیہ 9° - ہسہ 9° = $-\sqrt{1 - \text{سیہ } 18^\circ} = -\sqrt{1 - \frac{1 - \sqrt{5}}{4}}$

$$= -\sqrt{\frac{\sqrt{5} - 5}{2}} \quad \text{..............(2)}$$

(1) و (2) کو جمع کر کے حاصل ہوا

سیہ 9° = $\dfrac{\sqrt{\sqrt{5} - 5} - \sqrt{\sqrt{5} + 3}}{4}$

و (2) سے (1) کو مفرق کر کے حاصل ہوا

ہسہ 9° = $\dfrac{\sqrt{\sqrt{5} - 5} + \sqrt{\sqrt{5} + 3}}{4}$

اب 9° کے بقیہ دالات بھی حاصل کیے جا سکتے ہیں۔

و چونکہ 81° 9° کا اتمامی ہے، تو 81° کے دالات کی قیم مضمون 69 کا استعمال

کرکے حاصل کی جا سکتی ہیں۔

باب 9

تشبیہات و مساوات تثلیثی۔

124. مضامین 88 و 90 کے فارمولات دو سے زیادہ زوایا کے جمع کے تناسبات تثلیثی حاصل کرنے میں بھی استعمال کیے جا سکتے ہیں۔

مثال: سیہ (ب + ج + ض) = سیہ (ب + ج) ہسہ ض + ہسہ (ب + ج) سیہ ض

= [سیہ ب ہسہ ج + ہسہ ب سیہ ج] ہسہ ض + [ہسہ ب ہسہ ج - سیہ ب سیہ ج] سیہ ج

= سیہ ب ہسہ ج ہسہ ض + ہسہ ب سیہ ج ہسہ ض

+ ہسہ ب ہسہ ج سیہ ض - سیہ ب سیہ ج سیہ ض

تو   ہسہ (ب + ج + ض) = ہسہ (ب + ج) ہسہ ض - سیہ (ب + ج) سیہ ض

= (ہسہ ب ہسہ ج - سیہ ب سیہ ج) ہسہ ض - (سیہ ب ہسہ ج + ہسہ ب سیہ ج) سیہ ض

= ہسہ ب ہسہ ج ہسہ ض - ہسہ ب سیہ ج سیہ ض

- سیہ ب ہسہ ج سیہ ض - سیہ ب سیہ ج ہسہ ض

و   مسہ (ب + ج + ض) = $\frac{\text{مسہ (ب + ج) + مسہ ض}}{\text{1 - مسہ (ب + ج) مسہ ض}}$

$$= \frac{\frac{\text{مسہ ب + مسہ ج}}{\text{1 - مسہ ب مسہ ج}} + \text{مسہ ض}}{1 - \frac{\text{مسہ ب + مسہ ج}}{\text{1 - مسہ ب مسہ ج}}\ \text{مسہ ض}}$$

$$= \frac{\text{مس ب + مس ج + مس ض − مس ب مس ج مس ض}}{\text{1 − مس ج مس ض − مس ض مس ب − مس ب مس ج}}$$

125. گزشتہ مضمون کا آخری فارمولہ ایک مکتسب کلی کا مسئلہ جزی ہے، جس سے زوایا کی کسی بھی تعداد کے اجتماع کا مماس ان زوایا کے مماسات کے اعتبار سے حاصل کیا جا سکتا ہے۔

وہ مکتسب ہے **مس (ب$_1$ + ب$_2$ + ب$_3$ + ... + ب$_{ط}$)**

$$= \frac{\text{ش}_1 - \text{ش}_3 + \text{ش}_5 - \text{ش}_7 + \dots}{1 - \text{ش}_2 + \text{ش}_4 - \text{ش}_6 + \dots} \quad \text{.........(1)}$$

و یہاں

ش$_1$ = مس ب$_1$ + مس ب$_2$ + ... + مس ب$_{ط}$

= متفرق زوایا کے مماسات کا اجتماع۔

ش$_2$ = مس ب$_1$ مس ب$_2$ + مس ب$_2$ مس ب$_3$ + ...

= دو مماست کے ضرب کا اجتماع

ش$_3$ = مس ب$_1$ مس ب$_2$ مس ب$_3$ + مس ب$_2$ مس ب$_3$ مس ب$_4$ + ...

= تین مماست کے ضرب کا اجتماع، و ایسے ہی آگے بھی ہوگا۔

فرض کرو کہ نسبت (1) ط زوایا کے لیے صادق ہے، پھر اس میں ایک زاویہ ب$_{ط+1}$ زیادہ کرو۔

تو ہوا مس (ب$_1$ + ب$_2$ + ... + ب$_{ط+1}$)

= مس [(ب$_1$ + ب$_2$ + ... ب$_{ط}$) + ب$_{ط+1}$]

$$= \frac{\text{مس (ب}_1 + \text{ب}_2 + \dots + \text{ب}_{ط}) + \text{مس ب}_{ط+1}}{1 - \text{مس (ب}_1 + \text{ب}_2 + \dots + \text{ب}_{ط}) \times \text{مس ب}_{ط+1}}$$

$$= \frac{\dfrac{\text{ش}_1 - \text{ش}_3 + \text{ش}_5 - \text{ش}_7 + \ldots}{1 - \text{ش}_2 + \text{ش}_4 \ldots} + \text{مس ب}_{\text{ط}+1}}{1 - \dfrac{\text{ش}_1 - \text{ش}_3 + \text{ش}_5 \ldots}{1 - \text{ش}_2 + \text{ش}_4 \ldots}\,\text{مس ب}_{\text{ط}+1}}$$

اب مس ب^1، مس ب^2، ... مس $\text{ب}^{\text{ط}+1}$ کا نام رکھو تـ^1، تـ^2، ... $\text{تـ}^{\text{ط}+1}$۔

تو ہوا مس $(\text{ب}_1 + \text{ب}_2 + \ldots + \text{ب}_{\text{ط}+1})$

$$= \frac{(\text{ش}_1 - \text{ش}_3 + \text{ش}_5 \ldots) + \text{تـ}_{\text{ط}+1}(1 - \text{ش}_2 + \text{ش}_4 \ldots)}{(1 - \text{ش}_2 + \text{ش}_4 \ldots) - (\text{ش}_1 - \text{ش}_3 + \text{ش}_5 \ldots)\,\text{تـ}_{\text{ط}+1}}$$

$$= \frac{(\text{ش}_1 + \text{تـ}_{\text{ط}+1}) - (\text{ش}_3 + \text{ش}_2\text{تـ}_{\text{ط}+1}) + (\text{ش}_5 + \text{ش}_4\text{تـ}_{\text{ط}+1})\ldots}{1 - (\text{ش}_2 + \text{ش}_1\text{تـ}_{\text{ط}+1}) - (\text{ش}_4 - \text{ش}_3\text{تـ}_{\text{ط}+1}) - (\text{ش}_6 + \text{ش}_5\text{تـ}_{\text{ط}+1})\ldots}$$

لیکن $\text{ش}_1 + \text{تـ}_{\text{ط}+1} = (\text{تـ}_1 + \text{تـ}_2 + \ldots + \text{تـ}_{\text{ط}}) + \text{تـ}_{\text{ط}+1}$

= (ط+1) مماسات کا اجتماع۔

$\text{ش}_2 + \text{ش}_1\text{تـ}_{\text{ط}+1} = (\text{تـ}_1\,\text{تـ}_2 + \text{تـ}_2\,\text{تـ}_3 + \ldots) + (\text{تـ}_1 + \text{تـ}_2 + \ldots + \text{تـ}_{\text{ط}})\,\text{تـ}_{\text{ط}+1}$

= (ط+1) مماسات میں سے دو کا ایک مرتبہ میں اجتماع۔

$\text{ش}_3 + \text{ش}_2\text{تـ}_{\text{ط}+1} = (\text{تـ}_1\,\text{تـ}_2\,\text{تـ}_3 + \text{تـ}_2\,\text{تـ}_3\,\text{تـ}_4 + \ldots) + (\text{تـ}_1\,\text{تـ}_2 + \text{تـ}_2\,\text{تـ}_3 + \ldots)\,\text{تـ}_{\text{ط}+1}$

= (ط+1) مماسات میں سے تین کا ایک مرتبہ میں اجتماع۔

لہذا ہم نے دیکھا کہ یہ قانون ط+1 زوایا کے لیے ویسے ہی صادق ہے جیسے ط زوایا کے لیے صادق ہے۔

لہذا اگر یہ مکتسب ط زوایا کے لیے صادق ہوگا تو ط+1 زوایا کے لیے بھی صادق ہوگا۔

لیکن مضامین 98 و 124 کے مطابق، وہ 2 و 3 زوایا کے لیے بھی صادق ہے۔

لہذا 4 کے لیے بھی صادق ہوگا، و لہذا 5 کے لیے بھی ... لہذا یہ مکتسب کلیا صادق ہے۔

لازم: اگر تمام زوایا آپس میں متساوی ہوں، و ط عدد ہوں، و ہر ایک ان میں سے صہ کے متساوی ہو، تو

شہ$_1$ = ط مسہ صہ ؛ شہ$_2$ = ^{ط}ض$_2$ مسہ^2 صہ ؛ شہ$_3$ = ^{ط}ض$_3$ مسہ^3 صہ ......

مثال: مسہ 4صہ کی قیمت بتاو۔

$$\text{یہاں مسہ 4صہ} = \frac{\text{شہ}_1 - \text{شہ}_3}{1 - \text{شہ}_2 + \text{شہ}_4} = \frac{4\,\text{مسہ صہ} - {}^{4}\text{ض}_3\,\text{مسہ}^3\,\text{صہ}}{1 - {}^{4}\text{ض}_2\,\text{مسہ}^2\,\text{صہ} + {}^{4}\text{ض}_4\,\text{مسہ}^4\,\text{صہ}}$$

$$= \frac{4\,\text{مسہ صہ} - 4\,\text{مسہ}^3\,\text{صہ}}{1 - 6\,\text{مسہ}^2\,\text{صہ} + \text{مسہ}^4\,\text{صہ}}$$

126. گزشتہ مضمون میں بیان گردہ طریقے کے مثل طریقہ سے یہ دکھایا جا سکتا ہے

کہ سیہ (ب$_1$ + ب$_2$ + ... + ب$_{ط}$)

= ہسہ ب$_1$ ہسہ ب$_2$ ... ہسہ ب$_{ط}$ (شہ$_1$ - شہ$_3$ + شہ$_5$ - ...)۔

و یہ کہ ہسہ (ب$_1$ + ب$_2$ + ... + ب$_{ط}$)

= ہسہ ب$_1$ ہسہ ب$_2$ ... ہسہ ب$_{ط}$ (1 - شہ$_2$ + شہ$_4$ - ...)۔

و یہاں شہ$_1$ ، شہ$_2$ ، شہ$_3$ ، ... کی قیم مضمون گزشتہ کے مثل ہوں گی۔

127. **تشبیہات جو مثلث کے زوایا کے تناسبات تثلیثی کے درمیان قائم ہوں۔**

جب تین زوایا ب، ج، ض ایسے ہوں کہ ان کا اجتماع 180° ہو، تو ان کے تناسبات تثلیثی کے درمیان کئی نوع کی نسبتیں پائی جائیں گی۔

و ان کے ثبوت کا طریقہ امثلۂ آیندہ سے نمایا ہوگا۔

مثال 1: اگر ب + ج + ض = 180°، تو یہ ثابت کرنے کے لیے کہ

سیِ 2ب + سیِ 2ج + سیِ 2ض = 4 سیِ ب سیِ ج سیِ ض۔

سیِ 2ب + سیِ 2ج + سیِ 2ض = 2 سیِ (ب + ج) ہس (ب - ج) + 2 سیِ ض ہس ض

چونکہ ب + ج + ض = 180°،

تو ہوا ب + ج = 180° - ض،

و لہذا سیِ (ب + ج) = سیِ ض،

و ہس (ب + ج) = - ہس ض (مضمون 72)۔

لہذا عبارت ہوئی

= 2 سیِ ض ہس (ب - ج) + 2 سیِ ض ہس ض

= 2 سیِ ض [ہس (ب - ج) + ہس ض]

= 2 سیِ ض [ہس (ب - ج) - ہس (ب + ج)]

= 2 سیِ ض × 2 سیِ ب سیِ ج

= 4 سیِ ب سیِ ج سیِ ض۔

مثال 2: اگر ب + ج + ض = 180°، تو ثابت کرو کہ

ہس ب + ہس ج - ہس ض = - 1 + 4 ہس $\frac{ب}{2}$ ہس $\frac{ج}{2}$ سیِ $\frac{ض}{2}$ ۔

عبارت ہوئی = ہس ب + (ہس ج - ہس ض)

= 2 ہس^{2} $\frac{ب}{2}$ - 1 + 2 سیِ $\frac{ج + ض}{2}$ سیِ $\frac{ض - ج}{2}$ ۔

اب ج + ض = 180° - ب،

تو $\frac{ج + ض}{2}$ = 90° - $\frac{ب}{2}$ ،

ولہذ $\text{سیہ}\ \frac{\text{ج} + \text{ض}}{2} = \text{ہسہ}\ \frac{\text{ب}}{2}$،

و $\text{ہسہ}\ \frac{\text{ج} + \text{ض}}{2} = \text{سیہ}\ \frac{\text{ب}}{2}$۔

لہذا عبارت حاصل ہوئی

$$= 2\ \text{ہسہ}^2\ \frac{\text{ب}}{2} - 1 + 2\ \text{ہسہ}\ \frac{\text{ب}}{2}\ \text{سیہ}\ \frac{\text{ض} - \text{ج}}{2}$$

$$= 2\ \text{ہسہ}\ \frac{\text{ب}}{2} \left[\text{ہسہ}\ \frac{\text{ب}}{2} + \text{سیہ}\ \frac{\text{ض} - \text{ج}}{2}\right] - 1$$

$$= 2\ \text{ہسہ}\ \frac{\text{ب}}{2} \left[\text{سیہ}\ \frac{\text{ج} + \text{ض}}{2} + \text{سیہ}\ \frac{\text{ض} - \text{ج}}{2}\right] - 1$$

$$= 2\ \text{ہسہ}\ \frac{\text{ب}}{2} \times 2\ \text{سیہ}\ \frac{\text{ض}}{2}\ \text{ہسہ}\ \frac{\text{ج}}{2} - 1$$

$$= -1 + 4\ \text{ہسہ}\ \frac{\text{ب}}{2}\ \text{ہسہ}\ \frac{\text{ج}}{2}\ \text{سیہ}\ \frac{\text{ض}}{2}$$۔

مثال 3: اگر ب + ج + ض = 180°، تو ثابت کرو کہ

سیہ^2 ب + سیہ^2 ج + سیہ^2 ض = 2 + 2 ہسہ ب ہسہ ج ہسہ ض۔

فرض کرو کہ س = سیہ^2 ب + سیہ^2 ج + سیہ^2 ض،

تو 2س = 2 سیہ^2 ب + 1 - ہسہ 2ج + 1 - سیہ 2ض

= 2 سیہ^2 ب + 2 - 2 ہسہ (ج + ض) ہسہ (ج - ض)

= 2 - 2 ہسہ^2 ب + 2 - 2 ہسہ (ج + ض) ہسہ (ج - ض)

∴ س = 2 + ہسہ ب [ہسہ (ج - ض) + ہسہ (ج + ض)]

چونکہ ہسہ ب = ہسہ {180° - (ج + ض)} = - ہسہ (ج + ض)

∴ س = 2 + ہسہ ب × 2 ہسہ ج ہسہ ض

= 2 + 2 ہسہ ب ہسہ ج ہسہ ض۔

مثال 4: اگر ب + ج + ض = 180°، تو ثابت کرو کہ

مس ب + مس ج + مس ض = مس ب مس ج مس ض۔

مضمون 124 کے تیسرے فارمولہ سے حاصل ہوا

$$\text{مس (ب + ج + ض)} = \frac{\text{مس ب + مس ج + مس ض - مس ب مس ج مس ض}}{\text{1 - (مس ج مس ض + مس ض مس ج + مس ب مس ج)}}$$

لیکن مس (ب + ج + ض) = مس 180° = 0

لہذا 0 = مس ب + مس ج + مس ض - مس ب مس ج مس ض

یعنی مس ب + مس ج + مس ض = مس ب مس ج مس ض

و اسے فارمولہ استعمال کیے بنا بھی ثابت کیا جا سکتا ہے۔

کیونکہ مس (ب + ج) = مس (180° - ض) = - مس ض

$$\therefore \quad \frac{\text{مس ب + مس ج}}{\text{1 - مس ب مس ج}} = \text{- مس ض}$$

∴ مس ب + مس ج = - مس ض + مس ب مس ج مس ض

یعنی مس ب + مس ج + مس ض = مس ب مس ج مس ض

مثال 5: اگر ح + س + ع = ح س ع ، تو ثابت کرو کہ

$$\frac{2\text{ح}}{1-\text{ح}^2} + \frac{2\text{س}}{1-\text{س}^2} + \frac{2\text{ع}}{1-\text{ع}^2} = \frac{2\text{ح}}{1-\text{ح}^2} \times \frac{2\text{س}}{1-\text{س}^2} \times \frac{2\text{ع}}{1-\text{ع}^2}$$

فرض کرو کہ ح = مس ب، س = مس ج، ع = مس ض، تو ہوا

مس ب + مس ج + مس ض = مس ب مس ج مس ض،

$$\therefore \quad \frac{\text{مس ب + مس ج}}{\text{1 - مس ب مس ج}} = \text{- مس ض،}$$

تو ہوا مس (ب + ج) = مس(π - ض)

لہذا ب + ج + ض = طπ + π،

$$\therefore \quad \frac{2\text{ح}}{1-\text{ح}^2} + \frac{2\text{س}}{1-\text{س}^2} + \frac{2\text{ء}}{1-\text{ء}^2} = \frac{2\,\text{مس ب}}{1-\text{مس}^2\text{ب}} + \frac{2\,\text{مس ج}}{1-\text{مس}^2\text{ج}} + \frac{2\,\text{مس ض}}{1-\text{مس}^2\text{ض}}$$

= مس 2ب + مس 2ج + مس 2ض = مس 2ب مس 2ج مس 2ض،

(گزشتہ مثال کی دلیل کے مثل دلیل سے)

$$= \frac{2\text{ح}}{1-\text{ح}^2} \times \frac{2\text{س}}{1-\text{س}^2} \times \frac{2\text{ء}}{1-\text{ء}^2}$$

128. مکتسبات جمع و تفریق کو مساوات تثلیثی کی بعض انواع کو حل کرنے میں استعمال جا سکتا ہے۔

مثال: مساوات سیِ ح + سیِ 5ح = سیِ 3ح حل کرو۔

مضمون 94 کے فارمولات کے مطابق مساوات ہوئی

2سیِ 3ح ہس 2ح = سیِ 3ح

∴ سیِ 3ح = 0، یا 2ہس 2ح = 1

اگر سیِ 3ح = 0، تو 3ح = طπ

اگر ہس 2ح = $\frac{1}{2}$ ، تو 2ح = 2طπ + $\frac{\pi}{3}$

لہذا ح = $\frac{\text{ط}\pi}{3}$ ، یا طπ ± $\frac{\pi}{6}$۔

129. وہ مساوات حل کرنا جس کی صورت ہو

بـ ہس ص + جـ سیِ ص = ضـ ۔

مساوات کے دونوں جانب کو $\sqrt{\text{بـ}^2 + \text{جـ}^2}$ سے تقسیم کرو تاکہ ہو وہ جائے

$$\frac{\text{بـ}}{\sqrt{\text{بـ}^2 + \text{جـ}^2}}\,\text{ہس ص} + \frac{\text{جـ}}{\sqrt{\text{بـ}^2 + \text{جـ}^2}}\,\text{سیِ ص} = \frac{\text{ضـ}}{\sqrt{\text{بـ}^2 + \text{جـ}^2}}$$

اب جدولِ مماسات میں وہ زاویہ تلاشو جس کا مماس $\frac{ج}{ب}$ ہو و اسے نام دو بھ،

تو ہوا   مس بھ = $\frac{ج}{ب}$، تو ہوا

سیِ بھ = $\frac{ج}{\sqrt{ب^2 + ج^2}}$، و ہس بھ = $\frac{ب}{\sqrt{ب^2 + ج^2}}$۔

تو اب مساوات کو ایسے لکھا جا سکتا ہے

ہس بھ ہس ص + سیِ بھ سیِ ص = $\frac{ض}{\sqrt{ب^2 + ج^2}}$،

یعنی   ہس (ص - بھ) = $\frac{ض}{\sqrt{ب^2 + ج^2}}$۔

اب جدول سے یا کسی دوسری طرح زاویہ جھ تلاشو جس کا ہمسائن ہو $\frac{ض}{\sqrt{ب^2 + ج^2}}$،

تو ہوا   ہس جھ = $\frac{ض}{\sqrt{ب^2 + ج^2}}$،

[یہ خالص تبھی ہو سکتا ہے جب ض > $\sqrt{ب^2 + ج^2}$]

تو مساوات ہوئی ہس (ص - بھ) = ہس جھ۔

تو اس کا حل ہوا ص - بھ = 2طπ ± جھ، تو ہوا

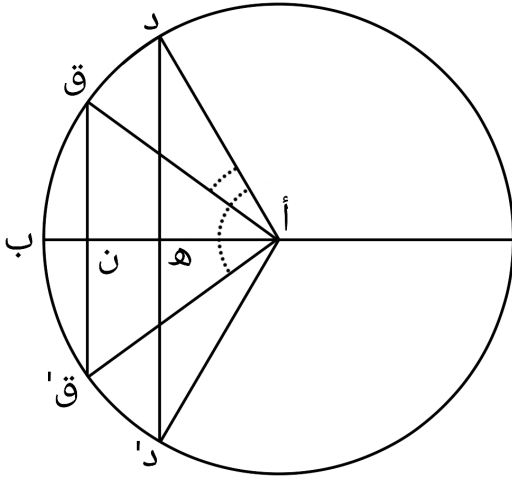
ص = 2طπ + بھ ± جھ،

و ط یہاں عدد صحیح ہے۔

و زوایا جیسے بھ و جھ جو سہولت حساب کے لیے عمل میں لائے گئے ہیں، انہیں ہم **زوایا تسہیلی** کہیں گے۔

130. حلِ گزشتہ کو مرسوماً بھی نمایا کیا جا سکتا ہے جیسا کہ آگے وارد ہے۔

خط ابتدائی پہ أھ ناپو متساوی ب کے و اس پہ عمود ھد ناپو متساوی ج کے۔

تو زاویہ ھأد وہ زاویہ ہوا جس کا مماس $\frac{ج}{ب}$ یعنی بھ ہے۔

پھر مرکز أ سے نصف قطر أد یعنی $\sqrt{ب^2 + ج^2}$ کا دائرہ بناو، و خط ابتدائی پہ أن ناپو ض کے متساوی۔

اب قنق' عمود بناو أن پہ جو محیط دائرہ سے ق و ق' پہ ملے؛ تو زوایا نأق و ق'أن میں سے ہر ایک جھ کے متساوی ہوا۔

لہذا زاویہ قأد ہوا بھ - جھ و ق'أد ہوا بھ + جھ ۔

تو مساوات کا حل ہوا

$$2ط\pi + قأد \text{ و } 2ط\pi + ق'أد$$

و یہ تعبیر فاسد ہو جائے گی اگر ض > $\sqrt{ب^2 + ج^2}$،

کیونکہ تب نقطہ ن دائرہ کے باہر واقع ہوگا۔

131. مثال عددی کے طور پہ ہم مساوات 5 ہس ص - 2 سیِ ص = 2 حل کریں گے۔

معلوم ہے کہ مس21°48' = $\frac{2}{5}$ ۔

مساوات مذکور کے دونوں جانب کو عبارت

$\sqrt{5^2 + 2^2}$ یعنی $\sqrt{29}$ سے تقسیم کر کے،

حاصل ہوا $\frac{5}{\sqrt{29}}$ ہس ص - $\frac{2}{\sqrt{29}}$ سیِ ص = $\frac{2}{\sqrt{29}}$

لہذا ہس ص ہس 21° 48' - سیِ ص سیِ 21° 48'

= سیِ 21° 48' = سیِ (90 - 68° 12')

= ہس 68° 12'۔

∴ $\quad$ ہس (ص + 21° 48') = ہس 68° 12'

تو $\quad$ ص + 21° 48' = 2طπ ± 68° 12' $\qquad$ (مضمون 83)

∴ $\quad$ ص = 2طπ - 21° 48' ± 68° 12'

$= 2$طπ - $\frac{\pi}{2}$ $\quad$ یا $\quad$ 2طπ + 46° 24'،

و ہیاں ط کوئی عدد صحیح ہے۔

132. **مثال:** عبارت سیِ ص + ہس ص کے رمز و مقدار میں تغیرات کو معلوم کرنا جبکہ ص 0° سے 360° تک جائے۔

معلوم ہے کہ سیِ ص + ہس ص = $\sqrt{2}\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\right.$ سیِ ص + $\left.\frac{1}{\sqrt{2}}\right.$ہس ص$\left.\right]$

= $\sqrt{2}$ [سیِ ص ہس 45° + ہس ص سیِ 45°] = $\sqrt{2}$ سیِ (ص + 45°)

جب ص زیادہ ہوا 0 سے 45° تک، تو سیِ (ص + 45°) زیادہ ہوا سیِ 45° سے 90° تک، و لہذا عبارت زیادہ ہوئی 1 سے $\sqrt{2}$ تک۔

و جب ص زیادہ ہوا 45° سے 135° تک، تو ص + 45° زیادہ ہوا 90° سے 180° تک، و لہذا عبارت ایجابی ہوئی و کم ہوئی $\sqrt{2}$ سے 0 تک۔

و جب ص زیادہ ہوا 135° سے 225° تک، تو عبارت تبدیل ہوئی $\sqrt{2}$ سیِ 180° سے $\sqrt{2}$ سیِ 270° تک، یعنی وہ سلبی ہوئی و کم ہوئی 0 سے - $\sqrt{2}$ تک۔

و جب ص زیادہ ہوا 225° سے 315° تک، تو عبارت تبدیل ہوئی $\sqrt{2}$ سیِ 270° سے $\sqrt{2}$ سیِ 360° تک، یعنی وہ سلبی ہوئی و زیادہ ہوئی - $\sqrt{2}$ سے 0 تک۔

و جب ص زیادہ ہوا 315° سے 360° تک، تو عبارت تبدیل ہوئی $\sqrt{2}$ سیِ 360° سے $\sqrt{2}$ سیِ 405° تک، یعنی وہ ایجابی ہوئی و زیادہ ہوئی 0 سے 1 تک۔

133. **مثال:** بـ ہسہ صہ + جـ سیہ صہ کے رمز و مقدار کے تغیرات کو معلوم کرنا و عبارت کی سب سے بڑی قیمت کو تلاشنا۔

معلوم ہے کہ

$$\text{بـ ہسہ صہ + جـ سیہ صہ} = \sqrt{\text{بـ}^2 + \text{جـ}^2}\left[\frac{\text{بـ}}{\sqrt{\text{بـ}^2 + \text{جـ}^2}}\ \text{ہسہ صہ} + \frac{\text{جـ}}{\sqrt{\text{بـ}^2 + \text{جـ}^2}}\ \text{سیہ صہ}\right]$$

فرض کرو کہ بھ سب سے چھوٹا ایجابی زاویہ ہے، اس طور پہ کہ

$$\text{ہسہ بھ} = \frac{\text{بـ}}{\sqrt{\text{بـ}^2 + \text{جـ}^2}}\text{، و سیہ بھ} = \frac{\text{جـ}}{\sqrt{\text{بـ}^2 + \text{جـ}^2}}\text{،}$$

تو عبارت ہوئی

$$= \sqrt{\text{بـ}^2 + \text{جـ}^2}\ [\text{ہسہ صہ ہسہ بھ + سیہ صہ سیہ بھ}] = \sqrt{\text{بـ}^2 + \text{جـ}^2}\ \text{ہسہ (صہ - بھ)}\text{۔}$$

جب صہ متغیر ہوا بھ سے 360° + بھ تک، تو زاویہ صہ - بھ متغیر ہوا 0 سے 360° تک، و لہذا عبارت کے رمز و مقدار میں تغیر بسہولت حاصل ہو گیا۔

چونکہ مقدار ہسہ (صہ - بھ) کی سب سے بڑی قیمت 1 ہے، یعنی جب صہ متساوی ہے بھ کے، تو عبارت کی سب سے بڑی قیمت ہوئی $\sqrt{\text{بـ}^2 + \text{جـ}^2}$۔

و صہ کی وہ قیمت جس سے یہ سب سے بڑی قیمت حاصل ہوئی، وہ ہوگی جس کا ہمسائن ہے $\frac{\text{بـ}}{\sqrt{\text{بـ}^2 + \text{جـ}^2}}$ ۔

باب 10

موصل۔

134. فرض کرو کہ ہمیں معلوم ہے کہ

$$10^{2.4031205} = 253$$

و $10^{2.6095944} = 407$

و $10^{5.0127149} = 102971$ ۔

و ہم بغیر عمل ضرب کے دکھا سکتے ہیں کہ $253 \times 407 = 102971$،

کیونکہ $253 \times 407 = 10^{2.4031205} \times 10^{2.6095944}$

$$= 10^{2.4031205 + 2.6095944}$$

$$= 10^{5.0127149}$$

$$= 102971.$$

تو یہاں دیکھا جا سکتا ہے کہ عمل ضرب ایک سہل عمل جمع سے بدل گیا۔

پھر فرض کرو کہ ہمیں معلوم ہے کہ

$$10^{4.9004055} = 79507,$$

$$10^{1.6334685} = 43,$$

تو یہاں ہم بسہولت یہ دکھا سکتے ہیں کہ 79507 کا جذر مکعب 43 ہے، کیونکہ

$$\sqrt[3]{79507} = (79507)^{\frac{1}{3}} = (10^{4.9004055})^{\frac{1}{3}} =$$

$$= 10^{\frac{1}{3}\times 4.9004055} = 10^{1.6334685} = 43$$

یہاں یہ دیکھا جا سکتا ہے کہ جذر مکعب حاصل کرنے کا مشکل عمل ایک سہل عمل تقسیم سے بدل گیا۔

135. **تعریف مُوصِل:** اگر بہ کوئی عدد ہے و حہ و ص دیگر کوئی اعداد ہیں و $بہ^{حہ}$ = ص،[19] تو حہ کو ہم "موصل ص تا جذر بہ"[20] کہیں گے، و تحریر کریں $\text{ﻟ}_{\text{بہ}}$ص۔

امثلہ: چونکہ $10^2 = 100$، لہذا $\text{ﻟ}_{10}100 = 2$۔

چونکہ $10^5 = 100000$، لہذا $\text{ﻟ}_{10}100000 = 5$۔

چونکہ $2^4 = 16$، لہذا $\text{ﻟ}_2 16 = 4$۔

چونکہ $8^{\frac{2}{3}} = [8^{\frac{1}{3}}]^2 = 2^2 = 4$، لہذا $\text{ﻟ}_8 4 = \frac{2}{3}$۔

چونکہ $9^{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{9^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{3^3} = \frac{1}{27}$، لہذا $\text{ﻟ}_9 \frac{1}{27} = -\frac{3}{2}$۔

توضیح چونکہ $بہ^0 = 1$ ہمیشہ، تو 1 کا موصل ہمیشہ صفر ہوگا، خواہ جذر کچھ ہو، یعنی $\text{ﻟ}_{\text{بہ}}1 = 0$۔

---

[19] اس میں بہ کو جذر کہیں گے، و حہ کو ارتفاع یا رفع کہیں گے، و ص کو حاصلِ ارتفاع یا حاصلِ رفع کہیں گے۔

[20] یعنی ص کو جذر بہ تک لے جانے والا۔

136. حساب جبر میں، اگر د و ھ مقادیر حقیقی ہیں، تو درج ذیل اصول، جنہیں ہم اصول ارتفاع کہ سکتے ہیں، صادق ہیں۔

1. $\text{ب}^{\text{د}} \times \text{ب}^{\text{ھ}} = \text{ب}^{\text{د}+\text{ھ}}$ ،
2. $\text{ب}^{\text{د}} \div \text{ب}^{\text{ھ}} = \text{ب}^{\text{د}-\text{ھ}}$ ،
3. $(\text{ب}^{\text{د}})^{\text{ھ}} = \text{ب}^{\text{دھ}}$ ۔

و انہیں کے مطابق ہمارے پاس تین اساسی اصول موصلات ہیں۔

1. $\text{لو}_{\text{ب}}(\text{دھ}) = \text{لو}_{\text{ب}}\text{د} + \text{لو}_{\text{ب}}\text{ھ}$ ،
2. $\text{لو}_{\text{ب}}\left(\frac{\text{د}}{\text{ھ}}\right) = \text{لو}_{\text{ب}}\text{د} - \text{لو}_{\text{ب}}\text{ھ}$ ،
3. $\text{لو}_{\text{ب}}\text{د}^{\text{ھ}} = \text{ھ} \times \text{لو}_{\text{ب}}\text{د}$ ۔

ان اصول کے دلائل آیندہ مضامین میں آ رہے ہیں۔

137. دو مقادیر کے حاصل ضرب کا موصل متساوی ہوتا ہے ان دونوں مقادیر کے موصلات کے اجتماع کے، جبکہ جذر وہی ہو، یعنی

$$\text{لو}_{\text{ب}}(\text{دھ}) = \text{لو}_{\text{ب}}\text{د} + \text{لو}_{\text{ب}}\text{ھ} \text{ ۔}$$

فرض کرو کہ $\text{ح} = \text{لو}_{\text{ب}}\text{د}$ ، تو ہوا $\text{ب}^{\text{ح}} = \text{د}$ ،

و $\text{س} = \text{لو}_{\text{ب}}\text{ھ}$ ، تو ہوا $\text{ب}^{\text{س}} = \text{ھ}$ ،

تو $\text{دھ} = \text{ب}^{\text{ح}} \times \text{ب}^{\text{س}} = \text{ب}^{\text{ح}+\text{س}}$ ۔

$\therefore \quad \text{لو}_{\text{ب}}\text{دھ} = \text{ح}+\text{س}$ ، (مضمون 135، تعریف)

$$= \text{لو}_{\text{ب}}\text{د} + \text{لو}_{\text{ب}}\text{ھ} \text{ ۔}$$

138. دو مقادیر کے حاصل تقسیم کا موصل متساوی ہوتا ہے ان کے موصلات کے فرق کے،

یعنی $\left(\frac{د}{ھ}\right)ᐱ_{ب} = دᐱ_{ب} - ھᐱ_{ب}$ ۔

فرض کرو کہ $ح = دᐱ_{ب}$ ، تو ہوا $ب^{ح} = د$ ، (مضمون 135، تعریف)

و $س = ھᐱ_{ب}$ ، تو ہوا $ب^{س} = ھ$ ،

تو $\frac{د}{ھ} = ب^{ح} \div ب^{س} = ب^{ح-س}$ ۔

$\therefore$ $دھᐱ_{ب} = ح-س$ ، (مضمون 135، تعریف)

$= دᐱ_{ب} - ھᐱ_{ب}$ ۔

139. جس مقدار کا کوئی ارتفاع کیا گیا ہو اس کے حاصل ارتفاع کا موصل متساوی ہوتا ہے اس مقدار کے موصل و اس ارتفاع کے حاصل ضرب کے، یعنی

$(د^{ھ})ᐱ_{ب} = ھ \times دᐱ_{ب}$ ۔

فرض کرو کہ $ح = دᐱ_{ب}$ ، تو ہوا $ب^{ح} = د$ ،

تو $د^{ھ} = (ب^{ح})^{ھ} = ب^{ھح}$ ،

$\therefore$ $(د^{ھ})ᐱ_{ب} = ھح$ ، (مضمون 135، تعریف)

$= ھ \times دᐱ_{ب}$ ۔

140. **موصل کا نظام عام:** موصلات کا وہ نظام جو ہم عملاً استعمال کرتے ہیں، اس میں جذر ہمیشہ 10 ہوتا ہے، تاکہ اگر کبھی جذر مذکور نہ ہو تو جذر 10 مقدر مان لیا جائے۔ و 10 کو بطور جذر استعمال کرنے کے مفاد اگلے تین مضامین میں آ رہے ہیں۔

141. **تعریف صفات و فُضلات:** اگر کسی عدد کا موصل بعض صحیح و بعض مکسور ہو، تو اس کے جز صحیح کو اس[21] کی صفت کہیں گے و جز اعشاری کو اس کا فُضلہ کہیں گے۔

لہذا اگر ل795 = 2.9003671 تو 2 صفت ہوا و 9003671. فضلہ ہوا۔

صفات سلبی: فرض کرو کہ ہمیں معلوم ہے کہ

ل2 = 30103.

تو ل(1/2) = ل1 - ل2 = 0 - ل2 = - 30103.

تو موصل 1/2 سلبی ہوا

اب مناسب ہے، جیسا کہ مضمون 143 میں بیان آ رہا ہے، کہ تمام فضلات کو ایجابی رکھا جائے۔

لہذا ہم - 30103. کے بجائے تحریر کریں گے -[1 - 69897.]

∴ ل1/2 = - (1 - 69897.) = -1+ 69897.

و اختصاراً یہ عبارت 1̅.69897 بھی لکھی جا سکتی ہے۔ و 1 کے اوپر جو خط افقی ہے وہ دلیل ہے کہ جز صحیح سلبی ہے؛ لیکن جز اعشاری ایجابی ہے۔

ایک مزید مثال 3̅.4771213 کا معنی ہوا - 3 + 4771213. .

---

[21] یعنی موصل کی صفت و ایسے ہی موصل کا فضلہ

142. کسی بھی عدد کے موصل کی صفت کو اس کا جائزہ لے کے معلوم کیا جا سکتا ہے۔

1. فرض کرو کہ وہ 1 سے زیادہ ہے،

تو چونکہ $10^0 = 1$،   تو ہوا 1ل = 0؛

و چونکہ $10^1 = 10$،   تو ہوا 10ل = 1؛

و چونکہ $10^2 = 100$،   تو ہوا 100ل = 2؛

و ایسے ہی آگے بھی۔

لہذا کوئی بھی عدد جو 1 و 10 کے درمیان ہو، تو اس کا موصل 0 و 1 کے درمیان ہوگا، یعنی وہ ایک مکسور اعشاری ہوگا، و لہذا اس کی صفت 0 ہوگی۔

و کوئی عدد جو 10 و 100 کے درمیان ہو، تو اس کا موصل 1 و 2 کے درمیان ہوگا، یعنی اس کی صفت 1 ہوگی۔

و ایسے ہی 100 و 1000 کے درمیان کے کسی عدد کا موصل 2 و 3 کے درمیان ہوگا، یعنی اس کی صفت 2 کے متساوی ہوگی۔

و 1000 و 10000 کے درمیان کے کسی عدد کی صفت 3 کے متساوی ہوگی۔

عام طور سے، کسی عدد کے موصل کی صفت ایک کم ہوتی ہے اس عدد کے جز صحیح کے رقوم کی تعداد سے۔

امثلہ: عدد 296.3457 کے جز صحیح میں 3 رقوم ہیں، تو اس کے موصل کی صفت 2 ہوئی۔

و 29634.57 کے موصل کی صفت ہوگی 5-1 یعنی 4۔

2. فرض کرو کہ وہ عدد 1 سے کم ہے،

تو چونکہ $10^{0} = 1$، لہذا ل1 = 0؛

و چونکہ $10^{-1} = \frac{1}{10} = .1$ ، تو ل.1 = -1؛

و چونکہ $10^{-2} = \frac{1}{100} = .01$ ، تو ل.01 = -2؛

و چونکہ $10^{-3} = \frac{1}{1000} = .001$ ، تو ل.001 = -3؛

و ایسے ہی آگے بھی۔

لہذا 1 و .1 کے درمیان کے کسی عدد کا موصل 0 و -1 کے درمیان ہوگا، و متساوی ہوگا -1+بعض اعشاری کے، یعنی اس کی صفت $\bar{1}$ ہوگی۔

و .1 و .01 کے درمیان کے کسی عدد کا موصل -1 و -2 کے درمیان ہوگا، و لہذا متساوی ہوگا -2+بعض اعشاری کے، یعنی اس کی صفت $\bar{2}$ ہوگی۔

وایسے ہی .01 و .001 کے درمیان کسی عدد کا موصل -2 و -3 کے درمیان ہوگا، یعنی اس کی صفت $\bar{3}$ ہوگی۔

عام طور سے کسی بھی مکسور اعشاری کے موصل کی صفت سلبی ہوتی ہے، و عددا 1 زیادہ ہوتی ہے اعشاریہ کے فوراً بعد واقع اصفار متصلہ[22] کی تعداد سے۔

تو ہم نے دیکھا کہ 1 و .1 کے درمیان کا کوئی کوئی بھی کسر (مثلاً .5) جس میں اعشاریہ کے بعد کوئی صفر متصل نہ ہو تو اس کی صفت $\bar{1}$ ہوگی۔

و .1 و .01 کے درمیان کا کوئی عدد (مثلاً .07) جس میں اعشاریہ کے فوراً بعد 1 صفر متصل ہو تو اس کی صفت $\bar{2}$ ہوگی۔

[22] اصفار متصلہ: وہ اصفار جو آپس میں متصل ہوں جیسے 100 میں، نہ کہ 010 میں۔

و 01. و 001. کے درمیان کا کوئی مکسور (مثلا 003.) جس میں اعشاریہ کے فوراً بعد 2 اصفار متصلہ ہوں، تو اس کی صفت $\bar{3}$ ہوگی۔
و دیگر کسی مکسور کے لیے بھی ایسے ہی ہوگا۔

امثلہ: عدد 00835. کے موصل کی صفت ہوئی $\bar{3}$۔
عدد 0000053. کے موصل کی صفت ہوئی $\bar{6}$۔
عدد 34567. کے موصل کی صفت ہوئی $\bar{1}$۔

143. تمام اعداد جن کے رقوم یکساں ہوں، تو ان کے موصلات کے فضلات بھی یکسان ہوں گے۔ و یہ بات ایک مثال سے واضح ہو جائے گی۔
فرض کرو کہ ہمیں معلوم ہے کہ
لو66818 = 4.8248935
تو لو668.18 = لو$\frac{66818}{100}$ = لو66818 - لو100 (مضمون 138)
= 4.8248935 - 2 = 2.8248935 .
لو.66818 = لو$\frac{66818}{1000000}$ = لو66818 - لو100000 (مضمون 135)
= 4.8248935 - 5 = $\bar{1}$.8248935 .
لو.00066818 = لو$\frac{66818}{10^8}$ = لو66818 - لو10^8 (مضمون 138)
= 4.8248935 - 8 = $\bar{4}$.8248935 .

اب اعداد 66818، 668.18، 66818.، 00066818. میں رقم معتبرہ یکساں ہیں، و فرق خالص اعشاریہ کے مقام میں ہے۔ ہم نے دیکھا کہ ان کے موصلات کے اجزاء اعشاری یکساں ہیں یعنی فضلات یسکاں ہیں، و فرق خالص صفات میں ہے۔
و ہر مسئلہ میں اس صفت کی قیمت گزشتہ مضمون میں بیان کردہ اصل سے حاصل کی جا سکتی ہے۔
و اس بات کا لحاظ رکھا جائے کہ کسی موصل کا فضلہ ہمیشہ ایجابی ہوتا ہے۔

144. **جدول موصلات:** 1 سے 108000 تک کے تمام اعداد کے موصلات موصلات کی جدول چیمبر میں درج ہیں، جس میں ان کی قیم سات مقامات اعشاری تک درست ہیں۔
طالب کو موصلات کی جدول مذکور یا دیگر کوئی جدول حاصل ہونی چاہیے، جو آیندہ بعض ابواب میں بہت سی امثلہ کے لیے مطلوب ہوگی۔
اگلے صفحہ پہ جداول چیمبر کا ایک صفحہ بطور نومنہ مکتوب ہے جس میں 52500 سے 53000 تک کے تمام اعداد تام کے موصلات کے فضلات مذکور ہیں۔

عدد		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
5250	720	1593	1676	1758	1841	1924	2007	2089	2172	2255	2337
51		2420	2503	2586	2668	2751	2834	2916	2999	3082	3164
52		3247	3330	3413	3495	3578	3661	3743	3826	3909	3991
53		4074	4157	4239	4322	4405	4487	4570	4653	4735	4818
54		4901	4983	5066	5149	5231	5314	5397	5479	5562	5645
55		5727	5810	5892	5975	6058	6140	6223	6306	6388	6471
56		6554	6636	6719	6801	6884	6967	7049	7132	7215	7297
57		7380	7462	7545	7628	7710	7793	7875	7958	8041	8123
58		8206	8288	8371	8454	8536	8619	8701	8784	8867	8949
59		9032	9114	9197	9279	9362	9445	9527	9610	9692	9775
60		9857	9940	0023	0105	0188	0270	0353	0435	0518	0600
5261	721	0683	0766	0848	0931	1013	1096	1178	1261	1343	1426
62		1508	1591	1674	1756	1839	1921	2004	2086	2169	2251
63		2334	2416	2499	2581	2664	2746	2829	2911	2994	3096
64		3159	3241	3324	3406	3489	3571	3654	3736	3819	3901
65		3984	4066	4149	4231	4314	4396	4479	4561	4644	4726
66		4809	4891	4973	5056	5138	5221	5303	5386	5468	5551
67		5633	5716	5798	5881	5963	6045	6128	6210	6293	6375
68		6458	6540	6623	6705	6787	6870	6952	7035	7117	7200
69		7282	7364	7447	7529	7612	7694	7777	7859	7941	8024
70		8106	8189	8271	8353	8436	8518	8601	8683	8765	8848
5271		8930	9013	9095	9177	9260	9342	9424	9507	9589	9672
72		9754	9836	9919	0001	0084	0166	0248	0331	0413	0495
73	722	0578	0660	0742	0825	0907	0990	1072	1154	1237	1319
74		1401	1484	1566	1648	1731	1813	1895	1978	2060	2142
75		2225	2307	2389	2472	2554	2636	2719	2801	2883	2966
76		3048	3130	3212	3295	3377	3459	3542	3624	3706	3789
77		3871	3953	4036	4118	4200	4282	4365	4447	4529	4612
78		4694	4776	4858	4941	5023	5105	5188	5270	5352	5434
79		5517	5599	5681	5763	5846	5928	6010	6092	6175	6257
80		6339	6421	6504	6586	6668	6750	6833	6915	6997	7079
5281		7162	7244	7326	7408	7491	7573	7655	7737	7820	7902
82		7984	8066	8148	8231	8313	8395	8477	8559	8642	8724
83		8806	8888	8971	9053	9135	9217	9299	9382	9464	9546
84		9628	9710	9792	9875	9957	0039	0121	0203	0286	0368
85	723	0450	0532	0614	0696	0779	0861	0943	1025	1107	1189
86		1272	1354	1436	1518	1600	1682	1765	1847	1929	2011
87		2093	2175	2257	2340	2422	2504	2586	2668	2750	2832
88		2914	2997	3079	3161	3243	3325	3407	3489	3571	3654
89		3736	3818	3900	3982	4064	4146	4228	4310	4393	4475
90		4557	4639	4721	4803	4885	4967	5049	5131	5213	5296
5291		5378	5460	5542	5624	5706	5788	5870	5952	6034	6116
92		6198	6280	6362	6445	6527	6609	6691	6773	6855	6937
93		7019	7101	7183	7265	7347	7429	7511	7593	7675	7757
94		7839	7921	8003	8085	8167	8250	8332	8414	8496	8578
95		8660	8742	8824	8906	8988	9070	9152	9234	9316	9398
96		9480	9562	9644	9726	9808	9890	9972	0054	0136	0128
97	724	0300	0382	0464	0546	0628	0710	0792	0874	0956	1038
98		1120	1202	1283	1365	1447	1529	1611	1693	1775	1857
99		1939	2021	2103	2185	2267	2349	2431	2513	2595	2677
52300		2759	2841	2923	3005	3086	3168	3250	3332	3414	3496

فرق	82
1	8
2	16
3	25
4	33
5	41
6	49
7	57
8	66
9	74

145.   ایسے کسی بھی عدد کا موصل معلوم کرنے کے لیے، جیسے 52687، ہم طریقہ آیندہ پہ چلیں گے۔ اولا جدول مذکور کی اس عمود میں نظر ڈالو جو سب سے داہنے جانب ہے، پھر اسی میں نیچے آو یہاں تک کہ 5268 پہ رکو، پھر اسی سطر میں بائیں آو یہاں تک کہ 7035 لکھا ہوا نظر آئے جو کہ اس عمود میں ہے جو رقم 7 کے نیچے ہے۔ تو وہ عدد جو 52687 کے مطابق ہے وہ 7217035 ہے۔ لیکن اس عدد میں خالص فضلہ کے رقوم ہیں تو فضلۂ مطلوب ہوا 7217035. ، و 52687 کی صفت ہوئی 4 مضمون 142 کے مطابق۔

لہذا   ل52687 = 4.7217035

و   ل.52687 = $\bar{1}.7217035$

و   ل.00052687 = $\bar{4}.7217035$

و اگر 52725 کا موصل مطلوب ہو تو طالب (سب سے داہنے والے عمود میں 5272 تک نیچے جا کے پھر اسی سطر میں رقم 5 کے عمود میں جا کے) پائے گا کہ وہ عدد $\overline{0166}$. ہے۔ و اس عدد پہ جو خط بلند ہے وہ اس بات پہ دلیل ہے کہ اس کا سابق 721 نہیں بلکہ 722 ہے۔ لہذا عدد 52725 کے مطابق فضلہ ہوا 7220166. ، و اس عدد 52725 کے موصل کی صفت ہوئی 4۔

لہذا   ل52725 = 4.7220166

و   ل.052725 = $\bar{2}.7220166$

اب ہم چند امثلہ بیان کریں گے اعمالِ حساب میں موصلات کے استعمال کا فائدہ نمایا کرنے کے لیے۔

146. **مثال 1:** $\sqrt[5]{23.4}$ کی قیمت بتاو۔

فرض کرو کہ ح = $\sqrt[5]{23.4} = (23.4)^{\frac{1}{5}}$

تو ہوا لوحہ = $\frac{1}{5} \times$ لو(23.4) مضمون 139 سے۔

جدول موصلات میں پایا کہ 234 کے مقابل موصل 3692159 ہے۔

لہذا لو23.4 = 1.3692159

لہذا لوحہ = $\frac{1}{5}$ [1.3692159] = 2738432. ۔

پھر جدول موصلات میں ہم نے پایا کہ موصل 2738432 کے مقابل میں عدد 187864 ہے، تو ہوا

لو1.87864 = 2738432.

∴ ح = 1.87864

مثال 2: $\frac{\sqrt[3]{.00034} \times {}^{3}(6.45)}{\sqrt[4]{8.93} \times {}^{2}(9.37)}$ کی قیمت بتاو۔

فرض کرو ح قیمت مطلوب ہے، تو ہوا، مضامین 138 و 139 کے مطابق،

لوحہ = لو$^{3}(6.45)$ + لو$^{\frac{1}{3}}(.00034)$ - لو$^{2}(9.37)$ - لو$\sqrt[4]{8.93}$

= لو$(6.45)\times 3$ + لو$(.00034) \times \frac{1}{3}$ - لو$(9.37) \times 2$ - لو$(8.93) \times \frac{1}{4}$

اب جدول موصلات میں ہم نے پایا کہ

عدد 645 کے مقابل موصل 8095597 ہے،

عدد 34 کے مقابل موصل 5314789 ہے،

عدد 937 کے مقابل موصل 9717396 ہے،

عدد 893 کے مقابل موصل 9508515 ہے،

لہذا حر $= 3 \times .8095597 + (\bar{4}.5314789)\frac{1}{3}$

$- 2 \times .9717396 - \frac{1}{4} \times .9508515$

لیکن $(\bar{4}.5314789)\frac{1}{3} = [\bar{6}+2.5314789]\frac{1}{3}$

$= \bar{2}+.8438263$

∴ حر $= 2.4286791 + [\bar{2}+.8438263] - 1.9434792 - .2377129$

$= 3.2725054 - 4.1811921$

$= \bar{1} + 4.2725054 - 4.1811921$

$= \bar{1}.0913133$.

جدول موصلات میں ہم نے پایا کہ عدد 12340 کے مقابل میں موصل 0913152 ہے، تو ہوا

حر $.12340 = \bar{1}.0913152$

لہذا حر = حر $.12340$ تقریبا

و تب ح = $.12340$

جب کسی عدد کا موصل جداول کے کسی بھی موصل کے مطابق نہ ہو بلکہ دو موصلات متداول کے وسط میں واقع ہو، تو اسے کیسے معلوم کرنا ہے اس کا بیان آیندہ باب ہے۔

مثال 3: معلوم ہے کہ لو2 = .30103 ، تو 2^{67} کے رقوم کے اعداد بتاو و 2^{-37} میں پہلے رقم معتبر کا مقام بتاو۔

ہمیں معلوم ہے لو 2^{67} = 67 × لو2 = 67 × .30103 .

= 20.16901

چونکہ 2^{67} کے موصل کی صفت 20 ہے، تو لازم ہے کہ 2^{67} میں 21 رقوم ہوں (مضمون 142)

پھر لو 2^{-37} = -37 × لو2 = -37 × .30103

= -11.113811 = $\overline{12}.86789$.

لہذا، مضمون 142 سے، 2^{-37} میں اعشاریہ کے بعد 11 اصفار متصلہ ہوں گے یعنی پہلا رقم معتبر بارہویں مقام اعشاری پہ ہوگا۔

مثال 4: معلوم ہے کہ لو3 = .4771213 ، لو7 = -.8450980 ، لو11 = 1.0413927۔

تو حل کرو عبارت

$3^{ح} \times 7^{2ح+1} = 11^{ح+5}$

دونوں جوانب کو ان کے موصل سے تبدیل کیا تو ہوا

لو $3^{ح}$ × لو $7^{2ح+1}$ = لو $11^{ح+5}$

∴ ح × لو3 + (2ح+1) × لو7 = (ح+5) × لو11

∴ ح[لو3 + 2 × لو7 - لو11] = 5 × لو11 - لو7

$$\therefore \quad \text{ح} = \frac{\text{لو}7 - \text{لو}11 \times 5}{\text{لو}11 - \text{لو}7 \times 2 + \text{لو}3}$$

$$= \frac{.8450980 - 5.2069635}{1.0413927 - 1.6901960 + .4771213}$$

$$= \frac{4.3618655}{1.1259246}$$

$$= 3.87... \text{ ۔}$$

147. دلیل کہ **دلو$_{ب}$ = دلو$_{ج}$ × جلو$_{ب}$** ۔

فرض کرو کہ دلو$_{ب}$ = ح ، تو ہوا بـ^{ح} = د ۔

و دلو$_{ج}$ = س ، تو ہوا جـ^{س} = د ۔

∴ بـ^{ح} = جـ^{س} ۔

لہذا (بـ^{ح})لو$_{ب}$ = (جـ^{س})لو$_{ب}$ ۔

∴ ح = س × جلو$_{ب}$ (مضمون 139)

لہذا دلو$_{ب}$ = دلو$_{ج}$ × جلو$_{ب}$ ۔

مضمون جاری کے مکتسب سے، ہم کسی عدد کے موصل تا جذر ج سے اس عدد کے موصل تا جذر بـ کو حاصل کر سکتے ہیں، و بـ سے مراد کوئی دوسرا جذر ہے۔ و آیندہ باب میں معلوم ہوگا کہ مناسب ہے کہ بلاواسطہ موصل تا جذر 10 کو حاصل نہ کیا جائے، بلکہ پہلے کسی دوسرے جذر تک حاصل کیا جائے پھر اس مکتسب سے تبدیل کر لیا جائے۔